

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З КУРСУ «ДИНАМІКА ПІДЗЕМНИХ ВОД»

1. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

РОЗДІЛ №1.

Лекція № 1. Вступ.

2 год.

Зміст і цілі курсу «Динаміка підземних вод». Наукові основи динаміки підземних вод були розроблені Бернуллі Д., Ейлером П., Жуковським Н, Лебке К. Є. та Євневичем І. О. Велике значення для розвитку курсу мали роботи Павловського М. М., Лебедева О. Ф., Саваренського Ф. П., Каменського Г. П., Щелкачова В. Н., Лейбензона О. С., Сіліна-Бекчуріна А. І., Альтовського М. Є., Шестакова В. М., Бочевера Ф. М., Язвіна Л. С. та інших.

Тема 1.

Лекція № 2. Основні види і загальні закономірності руху підземних вод в зоні аерації та в зоні водонасичення. 4 год.

Поняття, що вивчаються: гірська порода, пори і тріщини, підземні води, водяна пара, капілярні води, гравітаційні води, інфільтрація, фільтрація, коефіцієнт фільтрації, лінійний і нелінійний закони фільтрації.

Класифікація води в гірських породах. Вода в кристалічній решітці мінералів. Вода на поверхні часток породи. Вода в пористому середовищі та в тріщинах гірських порід (водяна пара, капілярні води, гравітаційні води). Рух різних видів води в гірських породах ненасичених водою (в зоні аерації).

Основні рівняння інфільтрації за Цункером. Теорія фільтрації води. Вплив капілярності та повітря в зоні аерації на процеси інфільтрації.

Рух підземних вод в породах, насичених водою. Основні закони руху підземних вод. Основні диференційні рівняння фільтрації. Лінійний закон фільтрації (закон Дарсі). Коефіцієнт фільтрації. Швидкість фільтрації і дійсна швидкість руху води в порах та тріщинах. Критична швидкість. Нелінійні закони фільтрації.

Навички, які отримуються: вірно розуміння природи підземних вод, теорії фільтрації і основних законів руху підземних вод.

ЗАКОНОМІРНОСТІ РУХУ ПІДЗЕМНИХ ВОД

Підземні води перебувають у постійному русі. Процеси руху води, що відбуваються в гірських породах під впливом різноманітних природних і штучних факторів, вивчає науково-методичний розділ гідрогеології "Динаміка підземних вод". Її основи закладені в роботах Дарсі, Дюпюї, Бернуллі, Ейлера тощо.

Види руху підземних вод

Види руху підземних вод виділяються виходячи з особливостей переміщення її в гірських породах. Розрізняють рух вод у ненасичених і насичених породах. У ненасичених породах (у зоні аерації) рух води має назву інфільтрації. Виділяють два види інфільтрації: вільне просочування та нормальна інфільтрація.

Вільне просочування – рух вільної води зверху вниз під дією сил тяжіння та капілярних сил. Рух відбувається окремими струменями по найбільших порах. Більша

частина пористого простору залишається при вільному просочуванні ненасиченою водою і в ній зберігається циркуляція атмосферного повітря і пари води.

Кожна струминка води розгалужується на більш тонкі цівки, які при подальшому русі навкруги зерен породи знову з'єднуються і роз'єднуються (рис. 22.1, а). Вільне просочування найчастіше спостерігається при випаданні дощу.

Нормальна інфільтрація простежується в зоні аерації, коли пористий простір ґрунту насичений водою повністю і рух вільної води зверху вниз відбувається суцільним потоком (рис. 22.1, б). Такий рух спостерігається, наприклад, під днищами каналів.

Нормальна інфільтрація може відбуватися як без гідравлічного зв'язку із ґрунтовими водами, так і з ним. При інфільтрації без гідравлічного зв'язку в зоні аерації на деякій глибині від поверхні землі утворюється підвішена вода. Вона відділяється від дзеркала ґрунтових вод аерованими шарами ґрунту. При інфільтрації з гідравлічним зв'язком вода, що просочується, досягає дзеркала ґрунтових вод, змикається з ним і сприяє підйому рівня ґрунтових вод.

Рух води в насичених гірських породах називається фільтрацією.

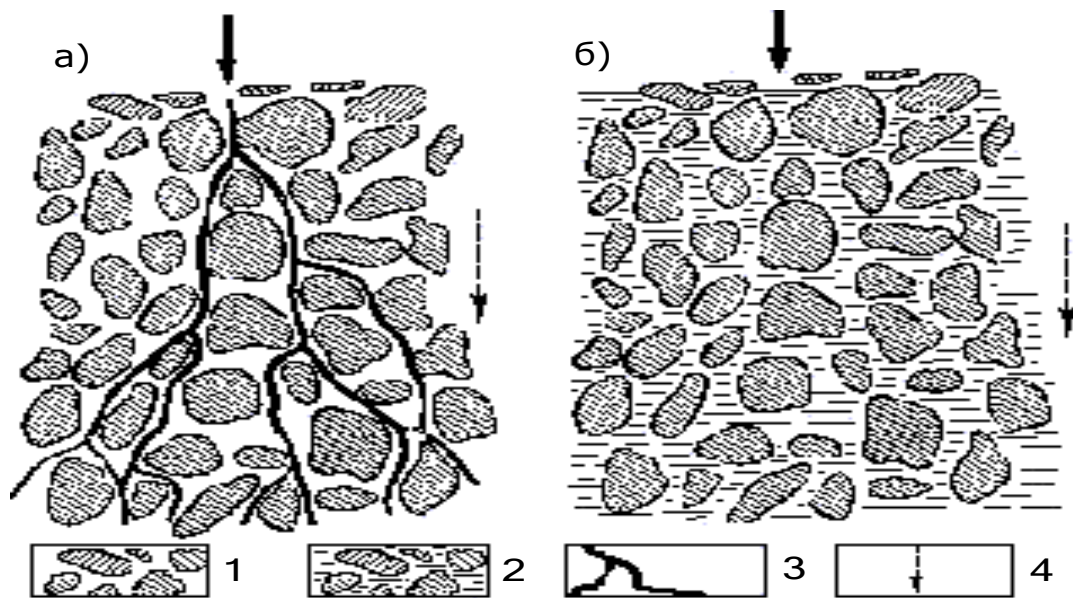


Рис. 1. Схема руху води (інфільтрації) у ґрунтах зони аерації:
а – вільне просочування; *б* – нормальна інфільтрація; 1 – ґрунт із пустими порами; 2 – ґрунт із насиченими водою порами; 3 – струминки води; 4 – напрямок руху води

Фільтрацію підземних вод вивчають згідно з умовами басейну або потоку. В умовах *басейну* рівень води у водоносних горизонтах займає горизонтальне положення і, завдяки цьому, вода в них не переміщується. У природному середовищі такі умови дуже рідкі. В основному, підземні води знаходяться в постійному русі, утворюючи *потоки*. У межах потоків рух води відбувається з місць із більшими гідродинамічними напорами до місць із меншими напорами, іншими словами, з місць із більш високими абсолютними відмітками рівня води до місць із меншими відмітками.

Під впливом природних і штучних факторів рух підземних вод (процес фільтрації) буває безнапірним і напірним, усталеним і неусталеним, рівномірним і нерівномірним, ламінарним і турбулентним.

Безнапірні фільтраційні процеси характерні для підземних вод із вільною рівневою поверхнею, що відповідає водоносним пластам, насиченим не на всю потужність (рис. 2).

Лекція 3. Основні види і закони руху підземних вод в зоні насичення

З гідродинамічної точки зору гравітаційні води зони насичення поділяються на дві групи:

- води із вільною поверхнею і
- води з напірною поверхнею.

Води з вільною поверхнею можуть бути ґрунтовими і дуже рідко – міжпластовими. Води із вільною поверхнею називаються безнапірними водами. При їх розкритті рівень води в свердловинах встановлюється на глибині їх розкриття. Цей термін не точний, бо ці води мають п'єзометричний напір, величина якого визначається із рівняння Бернуллі за формулою: $H=Z+P/\gamma$.

Вільна поверхня підземних вод носить назву дзеркала ґрунтових вод, тиск на цій поверхні дорівнює атмосферному. Рух ґрунтових вод проходить від ділянок водоносного горизонту, де п'єзометричний напір більший, до ділянок, де він менший.

Води з напірною поверхнею називаються напірними. Вони виникають тоді, коли водоносний шар (горизонт) заповнений повністю водою і обмежений зверху і знизу водотривкими або слабо водотривкими шарами гірських порід. Тиск в такому пласті вищий атмосферного. Напірними можуть бути міжпластові води (на ділянках розповсюдження прошарків або лінз водотривких порід). При розкритті такого водоносного горизонту, в зв'язку з тим що тиск в ньому більше атмосферного, вода в свердловинах піднімається вище покрівлі водоносного пласта і виникає напірна поверхня, яка називається п'єзометричною.

П'єзометрична поверхня мнимою і її положення залежить від величини п'єзометричного напору. При позначці п'єзометричного напору нижче поверхні Землі тоді п'єзометрична поверхня буде знаходитися у водотривкому шарі, який перекидає водоносний горизонт. В цьому випадку свердловини, які розкривають цей водоносний горизонт будуть несамовиливними.

При позначках п'єзометричного напору вище поверхні Землі п'єзометрична поверхня буде знаходитись вище водотривкого шару і свердловини, які розкривають напірний водоносний горизонт, будуть самовиливними або будуть фонтанувати.

Рух напірних вод проходить від ділянок напірних підземних вод з більшим п'єзометричним напором до ділянок з меншим напором.

Лінійний закон фільтрації Дарсі

В 1856 р. французький інженер-гідралік Дарсі вивчав рух води через горизонтальні трубки заповнені піском. В результаті цих дослідів він прийшов до висновку: «Я намагався шляхом точних експериментів виявити закон руху води через фільтри. Вони показали, що об'єм води, який проходить через шар піску даного складу, пропорційний тиску і оберти пропорційний товщині цього шару». Таким чином, позначаючи через S площу поперечного перерізу фільтра; k – коефіцієнт, який залежить від природи піску; l – товщина піщаного шару; $P-H_0$ – тиск в нижній частині фільтра; $P+H$ – атмосферний тиск доданий до глибини води фільтром, то можна для потоку води в цих умовах записати:

$$Q = kS \frac{H+l+H_0}{l} \quad (1)$$

Це рівняння зменшиться до $Q = kS \frac{H+l}{l}$, коли $P_0 = 0$, або коли тиск в основі фільтра дорівнює (еквівалентний) атмосферному тиску. У формулі Дарсі величина $h + l + H_0$ представляє різницю тисків у верхній і нижній частинах фільтра, а це значить $\Delta H = (p + H + l) - (p - H_0)$. де p – атмосферний тиск.

Буквені позначення, що входять у формулу Дарсі, в роботах з динаміки підземних вод пізніше були замінені таким чином: S на F , величина $H + l + H_0$ на ΔH і величина l на L . В результаті цих замін формула Дарсі набула такого вигляду:

$$Q = kF \frac{\Delta H}{L}, \quad (1a)$$

де Q – витрата води;

F – площа поперечного перерізу фільтру;

ΔH – падіння напору при фільтрації;

L – довжина шляху фільтрації;

k – коефіцієнт пропорціональності, який залежить від водопроникності піску.

Позначаючи падіння напору $\frac{\Delta H}{L}$ через напірний градієнт I із рівняння (1а) отримаємо:

$$Q = kFI. \quad (2)$$

Це рівняння пов'язує витрату фільтраційного потоку з падінням напору, який характеризує затрати енергії цього потоку. Зазначимо, що у фільтраційному потоці швидкості руху води дуже малі, тому можна нехтувати величиною швидкісного напору

$h_v = \frac{v^2}{2g}$ і визначати, що фільтраційний потік має ламінарний режим руху. Ця обставина і дозволяє припускати, що в області фільтрації існує лінійний зв'язок між витратою потоку і падінням напору.

Розділимо обидві частини рівняння (2) на F (площу) отримаємо:

$$\frac{Q}{F} = V = kI. \quad (3)$$

Кінематичною характеристикою фільтраційного потоку являється швидкість фільтрації V (Дюпюї. 1857 р.). Величина V має розмірність швидкості, але за сутністю являється мірою витрати фільтраційного потоку і не відповідає дійсній швидкості руху води в поровому просторі тому, що при її визначенні в розрахунок приймається вся площа поперечного перерізу, а не площа порового простору, через яку тільки і проходить рух води. Таке відхилення від реальної структури фільтраційного потоку в поровому середовищі являється основою для використання до фільтрації води уявлень механіки суцільного середовища і дозволяє перейти від статистично неоднорідного потоку в поровому просторі до осередненого потоку в усьому непреливному просторі.

Вводячи швидкість фільтрації закон Дарсі можна подати в такому вигляді: $V = kI$

(4) (швидкість фільтрації прямо пропорційна градієнту напору).

В диференціальній формі закон Дарсі для лінійного потоку записується таким рівнянням:

$$V_x = -k \frac{dH}{dx} \quad (5)$$

Якщо рух підземних вод проходить в площині XU (плановий потік), тоді складові швидкості фільтрації за цими вісями записуються такими рівняннями:

$$V_x = -k \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{і} \quad V_y = -k \frac{\partial H}{\partial y} \quad (6)$$

Коефіцієнт фільтрації

Коефіцієнт пропорціональності k , який входить у рівняння Дарсі (2, 3) називається *коефіцієнтом фільтрації*. Якщо у рівнянні $V = kI$ (4) прийняти $I = 1$, то $V = k$. Відповідно, *коефіцієнт фільтрації дорівнює швидкості фільтрації при напірному градієнті рівному одиниці*. Коефіцієнт фільтрації при гідродинамічних розрахунках має розмірність швидкості [$k = \text{м/доб}$]. Величина коефіцієнта фільтрації залежить від геометрії порового простору і від гідродинамічних властивостей рідин (щільності і в'язкості), які фільтруються через поровий простір. Приблизні значення коефіцієнта фільтрації різних порід наведені в табл. 1.

Таблиця 1.

Значення коефіцієнта фільтрації різних порід	
Породи	Коефіцієнт фільтрації, м/доб
Глини	0,001

Суглинки	0,01 – 0,1
Супіски	0,1 – 0,5
Піски сильно глинисті	0,5 – 1,0
Піски мілкозернисті	1,0 – 5,0
Піски середньозернисті	5,0 – 15,0
Піски крупнозернисті	15,0 – 50,0
Піски із галькою	50,0 – 100,0
Пісковики	100,0 – 200,0

Точніші значення коефіцієнта фільтрації водонасичених порід отримують при дослідних відкачках або за результатами лабораторних досліджень порід.

Якщо у рівнянні $V = kI$ (4) прийняти $I = 1$ і $F=1$, то $Q = k$. Отож коефіцієнт фільтрації можна виразити як кількість (витрата) води, яка проходить в одиницю часу через площу поперечного перерізу рівну одиниці. Якщо витрату води виразити в $м^3/доб$, площу поперечного перетину в $м^2$, то коефіцієнт фільтрації також буде виражатися в $м/доб$.

Коефіцієнт водопровідності

При гідрогеологічних розрахунках поряд з коефіцієнтом фільтрації використовується коефіцієнт водопровідності: $T = km$, де m – товщина водоносного горизонту, $м$. Розмірність коефіцієнту водопровідності – $[м^2/доб]$. Коефіцієнт водопровідності виражає здатність водоносного горизонту товщиною 1 $м$ фільтрувати через себе воду або іншу рідину в одиницю часу при напірному градієнті рівному одиниці.

Зв'язок коефіцієнта фільтрації з коефіцієнтом проникності

При вивченні фільтрації рідин перемінного складу (зокрема, при врахуванні зміни щільності і в'язкості води в зв'язку із зміною температури і мінералізації) більш придатною є інша форма закону Дарсі, яка безпосередньо враховує вплив гідродинамічних властивостей рідини.

Для врахування щільності рідини необхідно градієнт напору I замінити на градієнт гравітаційного потенціалу I_φ , який розраховується із рівняння: $I_\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}$, де $\varphi = p + \gamma Z$, а врахування в'язкості проводиться із зворотно пропорційної залежності витрати ламінарного потоку від коефіцієнта динамічної в'язкості η , який витікає із закону в'язкого

тертя: $\tau = -\eta \frac{dv}{dr}$ та із рівняння для витрати ламінарного потоку в трубі $Q_T = \int_0^{2t} 2\pi V dr = \frac{\pi r_n^4}{8\eta l}$.

Таким чином, рівняння закону Дарсі з врахуванням гідродинамічних властивостей рідини, має такий вид: $V = \frac{k^-}{\eta} I_\varphi \cdot I_\varphi = \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{\gamma \Delta H}{l} = \gamma I$,
(7)

де k^- – коефіцієнт проникності.

Коефіцієнт проникності більш точно характеризує пористе середовище ніж коефіцієнт фільтрації тому, що він не залежить від гідродинамічних властивостей фільтруючої рідини.

Слід відзначити, що це твердження справедливе тільки в тих випадках, коли геометрія порового середовища не змінюється при фізико-хімічній взаємодії рідини і гірської породи.

Найдемо зв'язок між коефіцієнтом фільтрації і коефіцієнтом проникності. Для цього порівняємо вирази $V = kI$ і $V = \frac{k^-}{\eta} \gamma I$. звідки виходить, що $k = k^- \gamma I = k^- \frac{\rho g}{\eta} = k^- \frac{q}{v}$, де $k^- = k \frac{v}{q}$ (8)

(в цих рівняннях: η – коефіцієнт в'язкості (η – буква ета), $1 \text{ пуаз} = 1 \text{ г/см с} = 1 \frac{\text{дин с}}{\text{см}^2}$; $v = \frac{h}{\rho}$ – коефіцієнт кінематичної в'язкості [$\text{см}^2/\text{с}$], v – буква ні).

Розмірність коефіцієнта проникності $k^- [\text{см}^2]$ – це розмірність площі.

В гідродинамічних розрахунках часто використовується змішана система одиниць, коли приймається швидкість фільтрації (V) в см/с , градієнт гравітаційного потенціалу (I_ϕ) в атм/см , коефіцієнт динамічної в'язкості (η) в сантинуазах і коефіцієнт проникності виражається в особливій одиниці, яка називається *дарсі*. *Одиниця такої проникності [1 дарсі] являє собою проникність такого середовища, в якому при перепаді гравітаційного потенціалу в 1 атм на довжині в 1 см і коефіцієнті в'язкості рівному 1 сантинуазу, швидкість фільтрації дорівнює 1 см/с*. Порівнюючи коефіцієнт проникності в змішаній і фізичній системах отримуємо, що $1 \text{ дарсі} = 10^{-8} \text{ см}^2$. Для води, яка має коефіцієнт кінематичної в'язкості (ні) $v = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$ при температурі $t = 20^\circ \text{C}$ із рівняння (8) отримаємо значення коефіцієнта фільтрації, яке відповідає проникності 1 дарсі $= 10^{-8} \text{ см}^2$:

$$K = 10^{-8} \frac{980}{0,01} = 9,8 \cdot 10^{-4} \text{ см/с} = 0,85 \text{ м/доб}, \text{ тобто для води коефіцієнт проникності, виражений в дарсі, близький до коефіцієнта фільтрації } (K_\phi), \text{ вираженому в м/доб.}$$

Швидкість фільтрації і дійсна швидкість руху води

Швидкість фільтрації $V = \frac{Q}{F}$ не являє собою дійсну швидкість руху води в поровому просторі. Це уявна (фіктивна) швидкість руху води. З такою швидкістю рухалася б вода, якби вона займала весь перетин (переріз) пласта (водоносного горизонту), як в каналах або трубах.

При фільтрації через поровий простір вода займає тільки частину перерізу, одже *площа перерізу через яку рухається вода дорівнює тільки загальній площі пор (тріщин)*.

Для отримання дійсної швидкості руху підземних вод, необхідно витрату води розділити на площу, яку займають пори або тріщини: $U_d = \frac{Q}{\omega \cdot n}$, (9)

де Q – витрата фільтраційного потоку; ω – площа пор (тріщин); n – коефіцієнт пористості.

$$\text{Порівнюючи } V = \frac{Q}{F} \text{ і } U_d = \frac{Q}{\omega \cdot n} \text{ отримаємо: } V = U_d n, \quad (10)$$

Тобто *швидкість фільтрації дорівнює дійсній швидкості руху підземних вод помножену на коефіцієнт пористості*. Швидкість фільтрації завжди менша дійсної швидкості руху підземних вод, тому що коефіцієнт пористості завжди менше 1 ($n < 1$).

Приклад: дійсна швидкість руху підземних вод $U_d = 5,0 \text{ м/доб}$, коефіцієнт пористості $n = 0,35$. $V = U_d n = 5 \cdot 0,35 = 1,75 \text{ м/доб}$.

Дійсна швидкість руху підземних вод U_d – це середня швидкість руху води в порах і не відображає дійсних швидкостей, з якими рухається вода в кожній окремій порі (різні струмінки рухаються з різною швидкістю від 0 до тах).

Порушення закону Дарсі

Закон Дарсі має широкую область застосування і є одним із основних законів фільтрації.

Рух підземних вод здебільшого має *ламінарний характер і підпорядковується лінійному закону Дарсі* $V = kI$, або $I = \frac{V}{k} = aV$, (11)
де $a = \frac{1}{k}$, (k – коефіцієнт фільтрації).

Отриманий вираз (11) показує, що при ламинарному русі підземних вод має місце лінійна залежність сил опору (виражених через напірний градієнт I) від швидкості фільтрації V .

Турбулентний рух підземних вод підпорядковується рівнянню Шезі-Краснопольського: $V = k_k \sqrt{I}$, $I = bV^2$, (12)

де $b = \frac{1}{k_k^2}$, (k_k – коефіцієнт фільтрації за Краснопольським).

Отриманий вираз (12) показує, що *при турбулентному русі підземних вод сили опору пропорційні квадрату швидкості фільтрації*.

Таким чином, *при турбулентному русі підземних вод відсутня лінійна залежність сил опору від швидкості фільтрації*.

Турбулентний рух підземних вод проявляється в породах з дуже великою проникністю при великих швидкостях фільтрації. Це верхня межа (границя) застосування лінійного закону Дарсі.

Виходячи із принципу незалежної дії в'язкого тертя та інерційно-пульсаційних сил можна стверджувати, що в цьому випадку найбільше достовірною формою основного закону фільтрації є двохчлена залежність типу:

$$I = aV + bV^2 \quad (13)$$

Це рівняння загального закону фільтрації запропонував Ж. Дюпюї в 1857 р.

Такий вигляд рівняння (13) являється універсальним тому, що воно охоплює граничні умови: настання *ламинарного режиму* при малих швидкостях фільтрації, коли bV^2 стає дуже малою величиною відносно aV ; і турбулентного руху при дуже великих швидкостях фільтрації, коли можна знехтувати лінійною складовою aV відносно з квадратичним bV^2 . Двохчлена залежність набагато краще степеневій залежності типу: $I = aV^n$, де $1 \leq n \leq 2$.

(14)

Формула Смрекера: $V = k^n \sqrt{I}$, коли при $n = 1$ вона дорівнює $V = kI$, а при $n = 2$ – $V = k_k \sqrt{I}$. Ці формули застосовуються дуже рідко.

Якщо в рівнянні (13) ввести $a = \frac{1}{k}$, тоді цю залежність зручно представити у такому вигляді: $I = \frac{V}{k} (1 + \alpha V)$, (15)

де α – коефіцієнт нелінійної фільтрації, визначається за формулою Ф. Енгелунда (1953 р.):

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{n^2} \sqrt{\frac{k}{vg}}, \quad (16)$$

Причому величина α_0 визначається за такими даними: $\alpha_0=0,11$ при $k>1$ см/с; $\alpha_0=0,18$ при $k=0,5$ см/с і $\alpha_0=0,3$ при $k \rightarrow 0$.

Очевидно, що вплив не лінійності основного закону фільтрації слід враховувати, якщо величина αV порівнюється з одиницею. Отож, при допустимій похибці в розрахунках ε критична швидкість фільтрації $v_{кр}$, яка визначає верхню межу (границю) використання закону Дарсі, можна отримати із умови: $\alpha V_{кр} = \varepsilon$, $V_{кр} = \frac{\varepsilon}{\alpha}$. (17)

Відповідно, при $\alpha V \gg 1$ основний закон фільтрації набуває квадратичний характер і відповідає турбулентному режиму руху підземних вод.

Практично його можна вважати справедливим при швидкості V_T , яку отримують із таких умов: $\frac{1}{\alpha V_T} = \varepsilon$, або $V_T = \frac{1}{\alpha \varepsilon}$. (18)

Порушення лінійного закону Дарсі мають місце тільки в високопрониклих породах в зоні різкої інтенсифікації фільтраційного потоку підземних вод, тобто в гідрогеологічній практиці зустрічається дуже рідко; настання турбулентного режиму для натурних умов практично нереально. Тому використання двохчленного закону фільтрації в кожному окремому випадку потребує спеціального обґрунтування.

Більший принциповий і практичний інтерес має аналіз аномалій основного за < Место для формулы. > кону фільтрації, які виникають при дуже малих швидкостях фільтрації підземних вод, характерних для слабопроникних порід. Природу цих аномалій пов'язують із впливом сил молекулярної взаємодії води з частками породи. Це пояснюється в'язко-пластичним характером руху води в ультра тонких порових каналах (Бондаренко, Чуднівський, 1967 р.).

Для аналізу закономірностей в'язко-пластичного режиму фільтрації розглянемо просту модель порового середовища, яка складається із однакових капілярних трубок радіусом r_0 .

Використовуючи для витрати капілярної трубки Q_T формулу для в'язко-пластичного руху води:

$$Q_T = \frac{\pi}{\eta} \left[\frac{\gamma I}{8} (r^4 - r_0^4) - \frac{\tau_0}{3} (r^3 - r_0^3) \right] r_0 = \frac{2\tau_0}{\gamma I}, \quad (19)$$

де τ_0 – початкова напруга здвигу;

r_0 – радіус струминки = 0 (середина трубки);

r_r – радіус трубки на відстані r від центра трубки;

η – коефіцієнт в'язкості;

γ – об'ємна маса води,

і пов'язуючи величину Q_T із швидкістю фільтрації V виразом: $Q_T = \frac{Q\omega_T}{n\omega} = \frac{\pi r_T^2}{n} V$,

(20)

де ω – площа поперечного перетину потоку;

ω_T – площа поперечного перетину трубки ($\omega_T = \pi r_T^2$);

n – коефіцієнт пористості породи.

Можна показати⁴ що при $I > I_0$ основний закон фільтрації описується таким рівнянням: $V = k \left[I - \frac{I_0}{3} + \frac{b}{3} \left(\frac{I_0}{I} \right)^3 \right]$. (21)

В рівнянні (21) величина початкового градієнту I_0 пов'язана з розрахунковим радіусом капілярної трубки $I_0 = \frac{2\tau_0}{\gamma r_T}$.

При великих градієнтах, коли $I \gg I_0$, рівняння (21) приймає вид лінійного:

$$V = k \left[I - \frac{I_0}{3} \right]. \quad (22)$$

1 – лінійний закон Дарсі; 2 – двохчлений закон; 3 – в'язко-пластичний рух.

Бондаренко (1967 р.) в своїх дослідях виявив реально-значимі величини початкових градієнтів, які виникають із аналізу в'язко-пластичного руху. Його прояви в природних умовах виникають дуже часто і потребують ретельного аналізу.

Аналізуючи області порушення закону Дарсі, можна зробити висновок про те, що вони мають локальний характер порівняно з областю застосування цього закону. Тому при обґрунтуванні закономірностей динаміки підземних вод за основу приймається закон Дарсі.

Тема 2.

Лекція № 3. Польові визначення напрямку і дійсної швидкості руху підземних вод. . 2 год.

Поняття, що вивчаються: швидкість фільтрації, дійсна швидкість руху підземних вод і основні польові методи їх визначення.

Рух води в порах гірських порід. Рівняння Павловського. Методи визначення напрямку і дійсної швидкості руху підземних вод.

Навички, які отримуються: вірне розуміння природи руху підземних вод в гірських породах і використання методів визначення напрямку і дійсної швидкості руху підземних вод.

Визначення дійсної швидкості руху води

Визначення дійсної швидкості руху води у водоносному горизонті проводиться дослідним шляхом за допомогою індикаторів-барвників (колориметричний спосіб) або розчинів різних солей (електролітичний спосіб).

Для визначення дійсної швидкості бурять дві свердловини до потрібного водоносного горизонту. Свердловини розміщують у напрямку потоку. Відстань між ними залежить від фільтраційних властивостей водовмісної породи і приймається в межах 0,5-1,5 м для суглинків, 5-15 м – для гравелистих пісків, 50 м і більше – для закарстованих порід.

Проводити дослід з визначення швидкості підземних вод можна тільки в тому випадку, коли відомий напрям руху підземного потоку. Якщо є надійна карта гідроізопіс або гідроізол'єз, то спеціальні бурові роботи для визначення напрямку потоку не проводять. Інакше треба спочатку спорудити три свердловини та скласти на ділянці, яка нас цікавить, карту гідроізопіс (гідроізол'єз).

Колориметричний метод ґрунтується на використанні барвників, які надають воді інтенсивного забарвлення (частіше – флюоресцин). Забарвлюючу речовину у вигляді розчину вводять у воду пускової свердловини (верхню за напрямком потоку підземних вод). Із другої свердловини періодично відбирають проби води і порівнюють її колір з еталонним розчином. Часом проходження розчину вважають час від моменту запуску барвника до моменту найбільш інтенсивного забарвлення води у другій свердловині. Знаючи відстань L між свердловинами і час t , за який індикатор разом із водою пройшов шлях між ними, дійсна швидкість руху визначається за формулою:

$$V_{\partial} = L/t. \quad (14)$$

Електролітичний метод визначення швидкості руху підземних вод ґрунтується на збільшенні електропровідності води при збільшенні концентрації розчинених у ній солей (рис. 4). В якості індикатору звичайно використовують хлористий амоній, який вводять у пускову свердловину. Обидві свердловини підключають до електричного кола. Заміри часу ведуться по зміні сили току в колі від моменту запуску електроліту до моменту найбільшої величини току. Швидкість руху підземних вод визначається за формулою (14).

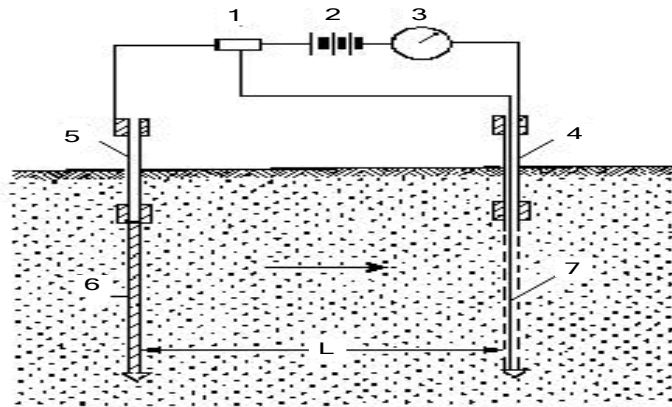


Рис. 4. Схема установки для визначення дійсної швидкості руху підземних вод: L – відстань між свердловинами; 1 – реостат; 2 – батарея; 3 – міліамперметр; 4 – спостережна свердловина; 5 – пускова свердловина; 6 – фільтр; 7 – електрод

Тема 3.

Лекція № 5. Загальні диференційні рівняння фільтраційного потоку

1. Диференційне рівняння Жуковського «Про рух підземних вод»

2.

М. Є. Жуковський в роботі «О движении подпочвенных вод» (1889 р.) вперше ввів поняття про силу опору пісків при фільтрації через них води як об'ємної сили, віднесеної до одиниці маси. Величина цієї сили дорівнює: $F = -\frac{gV}{k}$, (1)

де g – прискорення сили тяжіння;

V – швидкість фільтрації;

k – коефіцієнт фільтрації.

В рівнянні (1) знак « \rightarrow » показує, що сила опору направлена в сторону протилежну фільтрації підземних вод. З цього рівняння видно також, що сили опору при фільтрації води прямо пропорційні швидкості фільтрації і протилежно пропорційні коефіцієнту фільтрації. Уведемо у рівняння (1) значення коефіцієнтів швидкості фільтрації v_x , V_y і V_z .

Позначимо проєкції сили опору пісків на координатні вісі:

$$F_x = -\frac{gV_x}{k}, F_y = -\frac{gV_y}{k} \text{ і } F_z = -\frac{gV_z}{k} \quad (2)$$

Візьмемо рівняння Ейлера для неусталеного руху ідеальної рідини

:

Примітка: Рівняння Ейлера студенти вивчали в навчальній дисципліні «Вступ до фільтрації». Повторити самостійно!!!

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{dV_x}{dt} = 0;$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{dV_y}{dt} = 0;$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{dV_z}{dt} = 0.$$

де X , Y , Z – проєкції об'ємних сил на координатні вісі;

ρ – щільність ідеальної рідини;

$\frac{dV_x}{dt}$, $\frac{dV_y}{dt}$, $\frac{dV_z}{dt}$ – проєкції прискорення на координатні вісі.

(3)

Замінімо в рівнянні (3) вирази $-\frac{dV_x}{dt}$, $-\frac{dV_y}{dt}$, $-\frac{dV_z}{dt}$, які залежать від сил інерції, на проекції сил опору пісків при фільтрації через них води $-\frac{gV_x}{k}$, $-\frac{gV_y}{k}$, $-\frac{gV_z}{k}$.

Замінімо в рівнянні (3) також проекції об'ємних сил X , Y , Z на проекції деякої силової функції f , тобто прирівняємо $X = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Тоді рівняння Ейлера матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{gV_x}{k} &= 0; \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{gV_y}{k} &= 0; \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{gV_z}{k} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Рівняння (4) мають назву «Рівняння Жуковського». Це перші диференціальні рівняння руху підземних вод.

Із рівняння (4) знайдемо швидкості фільтрації:

$$V_x = -k \left(\frac{1}{\rho g} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right) = -k \frac{\partial f}{\partial x};$$

$$V_y = -k \left(\frac{1}{\rho g} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) = -k \frac{\partial s}{\partial y};$$

$$V_z = -k \left(\frac{1}{\rho g} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right) = -k \frac{\partial s}{\partial z};$$

де $\varepsilon = \frac{P}{\rho g} - \frac{f}{g}$.

Підземні води знаходяться під дією сили Тяжіння, тоді $f = -gZ$, звідки $\varepsilon = \frac{P}{\rho g} + Z$.

Так як $\rho g = \gamma$, то $\varepsilon = \frac{P}{\gamma} + Z$ (6)

Права частина рівняння (6) за рівнянням Бернуллі являє собою п'єзометричний напір H , отже $\varepsilon = H$, тоді рівняння (5) приймуть такий вираз:

$$V_x = -k \frac{\partial H}{\partial x}, \quad V_y = -k \frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{і} \quad V_z = -k \frac{\partial H}{\partial z} \quad (7)$$

Рівняння (7) і представляють собою лінійний закон Дарсі, виражений у диференціальній формі.

Враховуючи те, що п'єзометричний напір $H = Z + \frac{P}{\gamma}$ із рівнянь (7) отримаємо інший запис лінійного закону Дарсі, яка виражає лінійну залежність швидкості фільтрації від зміни гідростатичного тиску:

$$V_x = -\frac{k}{\gamma} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}, \quad V_y = -\frac{k}{\gamma} \cdot \frac{\partial P}{\partial y}, \quad V_z = -\frac{k}{\gamma} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (8)$$

Ці рівняння частіше всього використовуються у нафтовій гідравліці.

3. Рівняння нерозривності підземних вод

Якщо рідина рухається без утворення в ній порожнин або будь-яких розривів, то вона підпорядковується рівнянню нерозривності. Це рівняння являє собою математичний вираз закону збереження матерії або збереження маси рідини, що рухається.

Для виведення рівняння нерозривності візьмемо паралелепідет з гранями dx, dy і dz , паралельними вісям координат.

Розглянемо рух ідеальної рідини в напрямку вісі X . За елемент часу dt через грань $ABCD$ поступає маса рідини, яка дорівнює:

$$M_1 = \rho v_x dy dz dt, \quad (9)$$

де ρ – щільність ідеальної рідини;

V_x – проекція швидкості руху ідеальної рідини на вісі X

dy, dz – площа грані $ABCD$.

В той же час через суміжну грань $A'B'C'$ із паралелепіпеду витікає маса ідеальної рідини, яка дорівнює:

$$M_2 = \rho v_x dy dz dt + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} dx dy dz dt \quad (10)$$

Одме, накопичення маси ідеальної рідини в об'ємі паралелепіпеду за елемент часу dt дорівнює:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} dt = M_1 - M_2 = - \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} dx dy dz dt. \quad (11)$$

Аналогічним чином можна показати, що в напрямку вісей Y і Z накопичення маси ідеальної рідини за елемент часу dt дорівнює:

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} dt = - \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} dx dy dz dt. \quad (11a)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} dt = - \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} dx dy dz dt. \quad (11b)$$

Одне, загальне накопичення маси ідеальної рідини в об'ємі паралелепіпеду за елемент часу dt дорівнює:

$$\frac{\partial M}{\partial t} dt = - \left[\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt. \quad (12)$$

Початкова маса ідеальної рідини в об'ємі паралелепіпеду дорівнювала:

$$M = \rho dx dy dz. \quad (13)$$

У зв'язку із зміною щільності ρ за елемент часу dt маса ідеальної рідини отримає накопичення (приріст), яке дорівнює:

$$\frac{\partial M}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt. \quad (14)$$

Із порівняння рівнянь (12) і (14) тримаємо:

$$- \left[\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt. \quad (15)$$

Після скорочення в рівнянні (15) на $dx dy dz dt$ отримаємо:

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (16)$$

Отримана залежність (16) являється рівнянням нерозривності ідеальної рідини, вираженого в диференціальній формі.

При переході від ідеальної рідини до підземних вод необхідно враховувати, що рух води проходить усередині порового простору гірських порід, об'єм якого дорівнює:

$$V = n dx dy dz, \quad (17)$$

де n – пористість породи.

Тому після введення у рівняння (14) пористість породи, отримаємо:

$$\frac{\partial M}{\partial t} dt = \frac{\partial(\rho n)}{\partial t} dx dy dz dt. \quad (18)$$

В цьому випадку рівняння нерозривності набуде такого вигляду:

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho n)}{\partial t} = 0, \quad (19)$$

де V_x, V_y, V_z – проекції швидкості фільтрації на координатні вісі;

ρ – щільність води.

Рівняння (19) є рівнянням нерозривності підземних вод при врахуванні стискуваності води і породи в часі.

Якщо знехтувати стискуваністю води і породи, то рівняння нерозривності підземних вод буде аналогічним рівнянню нерозривності ідеальної рідини:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

Для двовірного (плоского) потоку маємо:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (20a)$$

Для одновірного (плоского) потоку маємо:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \quad (20b)$$

4. Потенціал швидкостей фільтрації (Рівняння Лапласа)

Із рівнянь (7) $V_x = -k \frac{\partial H}{\partial x}$, $V_y = -k \frac{\partial H}{\partial y}$ і $V_z = -k \frac{\partial H}{\partial z}$ бачимо, що проекції швидкостей фільтрації V_x , V_y і V_z на координатні вісі можна виразити у вигляді похідної функції $\Phi = -kH$ (Лагранж 1781), яка має назву «потенціал швидкостей».

Виходячи із загального уявлення про потенціал, можна визначити, що потенціал швидкостей підземних вод являє собою функцію, випадкові похідні якої, взяті з протилежним знаком по координатним вісям, дорівнюють проекціям швидкостей фільтрації в тих же напрямках:

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{і} \quad V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (21)$$

Через потенціал швидкостей виразимо і рівняння нерозривності (20). Якщо підставити в рівняння (20) із рівняння (21) значення швидкостей фільтрації, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (22)$$

Рівняння (22) являються рівняннями Лапласа. Воно часто записується у вигляді $\Delta \Phi = 0$, де Δ – оператор Лапласа.

Потенціал швидкостей $\Phi = -kH$, то рівняння Лапласа для підземних вод з напірною поверхнею можна записати так:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0. \quad (23)$$

Для плоского потоку підземних вод з напірною поверхнею рівняння Лапласа приймає такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0. \quad (24)$$

Для підземних вод із вільною поверхнею використовувати рівняння Лапласа прямо не можна. Але це можна зробити за допомогою підстановки в рівняння (23) виразу $\frac{h^2}{2} \rightarrow mH$.

В цьому випадку отримаємо:

$$\frac{\partial^2 (h^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial y^2} = 0. \quad (25)$$

Рівняння (25) носить ім'я Форхгеймера.

Рівняння Лапласа володіє відомими властивостями: любі комбінації окремих рішень рівняння Лапласа також являються його рішенням. З цього виходить, що можливо складати плоскі потенціальні потоки підземних вод (складання течій). Отриманий рух також буде потенціальним.

Докладно рівняння Лапласа розглядається в курсах математичної фізики.

Рівнянню Лапласа відповідає і функція течії (χy) , що можна доказати таким чином. Для цього візьмемо плоский потік підземних вод. Для нього є справедливим рівняння:

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{і} \quad V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (26)$$

Диференціюючи V_x по y і V_y по x із рівняння (26) отримаємо:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad \text{і} \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (27)$$

З рівнянь (27) отримаємо:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}. \quad (28)$$

З іншого боку із функції течії $\chi = f(xy)$ отримуємо:

$$V_x = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{і} \quad V_y = - \frac{\partial}{\partial x}$$

Підставимо ці значення в рівняння (28) отримаємо рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0. \quad (29)$$

Таким чином, потенціал швидкостей і функція течії відповідають рівнянню Лапласа.

5. Рівняння Коші-Рімана (сітка руху плоского потоку підземних вод)

Викладені вище дані показують, що для визначення швидкості фільтрації плоского потоку підземних вод існують дві групи рівнянь:

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad V_y = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{і} \quad V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

Порівнюючи ці рівняння, бачимо, що

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (30)$$

$$\text{і} \quad - \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (31)$$

Ми отримали рівняння Коші-Рімана. Із курсу вищої математики відомо, що цього досить для доведення ортогональності двох сімейств кривих $\Phi(x,y)$ і $\Psi(x,y)$, перші з яких представляють лінії рівного потенціалу, а другі – лінії течії.

Ці твердження справедливі і для динаміки підземних вод, де за лінії рівного потенціалу приймають лінії рівного напору. Проекції ліній рівного напору на горизонтальну площину називаються гідроізогіпсами (для водоносного горизонту із вільною поверхнею) або гідроізоп'езами (для напірного водоносного горизонту).

Карти гідроізогіпс і гідроізоп'ез широко використовуються для рішення різних задач динаміки підземних вод.

Система ліній рівних напорів і ортогональних (перпендикулярних) до них ліній течії утворюють гідродинамічну сітку або сітку руху плоского потоку підземних вод.

В кожній із чарунок (вічку) гідродинамічної сітки відношення сторін N/S завжди буде постійним.

Якщо $N/S=1$, то чарунки (вічка) гідродинамічної сітки являють собою квадрати (прямокутні або криволінійні). Якщо $N/S > 1$ або $N/S < 1$, то вони представляють прямокутники (прямокутні або криволінійні).

б. Рівняння плано-плоскої фільтрації підземних вод з вільною поверхнею

Для виведення рівняння плано-плоскої фільтрації підземних вод з вільною поверхнею розглянемо баланс води безкінечно малого елемента потоку з основою $dx dy$ і висотою h (В. М. Шестаков, 1965).

При усталеному русі в цей безкінечно малий елемент потоку поступає витрата води $g_x dy$ в напрямку вісі X і $g_y dx$ – в напрямку вісі Y , які на виході із елемента

отримують накопичення (приріст) відповідно $\frac{\partial g_x}{\partial x} dx dy$ (на вісі X) і $\frac{\partial g_y}{\partial y} dy dx$. Окрім цього в елемент потоку поступає інфільтраційна витрата, яка дорівнює $\omega dx dy$, (32)

де ω – інтенсивність інфільтрації атмосферних опадів.

Відповідно балансове рівняння планово-плоскої фільтрації підземних вод з вільною поверхнею для безкінечно малого елемента потоку можна записати в такому вигляді:

$$g_x dy + g_y dx + \omega dx dy = g_x dy + \frac{\partial g_x}{\partial x} dx dy + g_y dx + \frac{\partial g_y}{\partial y} dy dx. \quad (33)$$

Після скорочень в рівнянні (33) отримаємо рівняння нерозривності планово-плоскої фільтрації підземних вод з вільною поверхнею:

$$-\frac{\partial g_x}{\partial x} - \frac{\partial g_y}{\partial y} + \omega = 0. \quad (34)$$

Для планово-плоского потоку підземних вод з вільною поверхнею справедлива передумова Дюпюї про незмінність горизонтальних градієнтів напору I_x та I_y в кожному вертикальному перерізі, до того ж можна рахувати, що

$$I_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \text{ і } I_y = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad (35)$$

де H – напір на вільній поверхні підземних вод, який дорівнює її ординаті відносно площини порівняння напорів.

Напишемо вирази для питомих витрат g_x і g_y наступним чином:

$$g_x = \Pi_x = -T \frac{\partial H}{\partial x} \text{ і } g_y = \Pi_y = -T \frac{\partial H}{\partial y}, \quad (36)$$

де T – водопровідність пласта в цьому перерізі.

Підставимо (36) в (34) отримаємо загальне рівняння усталеного руху планово-плоского потоку підземних вод з вільною поверхнею:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \omega = 0. \quad (37)$$

Це рівняння нелінійне тому, що водопровідність пласта міняється не тільки на площині XY , але і в зв'язку зі зміною товщини потоку. В багатьох випадках для практичних розрахунків водопровідність пласта можна рахувати постійною. Тоді водопровідність T в рівнянні (37) виноситься із під знаку диференціювання і тоді воно прийме такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\omega}{T} = 0. \quad (38)$$

Рівняння (38) при відсутності інфільтрації атмосферних опадів ($\omega = 0$) переходить в рівняння Лапласа (24).

Для однорідного по вертикалі водоносного пласта з вільною поверхнею $T = kh$, де h – глибина (товщина) потоку. Тоді рівняння усталеного руху планово-плоского потоку підземних вод з вільною поверхнею прийме такий вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\omega}{k} = 0. \quad (39)$$

Якщо водоносний пласт (горизонт) має горизонтальний водотрив, тоді з ним суміщається площина порівняння напорів. В цьому випадку $h=H$. Враховуючи, що $h \partial H = \partial \left(\frac{h^2}{2} \right)$, рівняння (39) можна записати в такій формі:

$$\text{Рівняння (39) можна записати в такій формі:} \\ \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial y^2} + 2 \frac{\omega}{k} = 0, \quad (40)$$

яке при $\omega = 0$ переходить в рівняння Форхгеймера (25).

Значимо, що рівняння (40) виявляється лінійним відносно величини h^2 .

Лекція 4. Усталений (стаціонарний) рух підземних вод в однорідних водоносних горизонтах. 4 год.

Поняття, що вивчаються: однорідні і неоднорідні водоносні горизонти, усталений і неусталений рух підземних вод, напір і напірний градієнт, депресійна крива.

Однорідні та неоднорідні водоносні горизонти. Усталений і неусталений рух підземних вод. Плоский та радіальний потоки. Основні гідродинамічні елементи потоку. Напір підземних вод. Рівняння Д. Бернуллі. Напірний градієнт.

Рівномірний та нерівномірний рух підземних вод. Рух ґрунтових вод в горизонтальному пласті. Формула Дюпюї. Побудова депресійної кривої ґрунтових вод. Нерівномірний рух підземних вод. Формула Н.Н. Павловського.

Рух ґрунтових вод в горизонтальному пласті з врахуванням інфільтрації зверху. Рівняння депресійної кривої ґрунтових вод в міжрічковому масиві при наявності інфільтрації зверху.

Навички, які отримуються: вірне розуміння природи гідростатичного напору, правильне використання формул Бернуллі, Дюпюї і Павловського, вміння розраховувати витрати ґрунтових вод на горизонтальному водотриві і в міжрічковому масиві.

Під впливом природних і штучних факторів рух підземних вод (процес фільтрації) буває безнапірним і напірним, усталеним і неусталеним, рівномірним і нерівномірним, ламінарним і турбулентним.

Безнапірні фільтраційні процеси характерні для підземних вод із вільною рівневою поверхнею, що відповідає водоносним пластам, насиченим не на всю потужність (рис. 2).

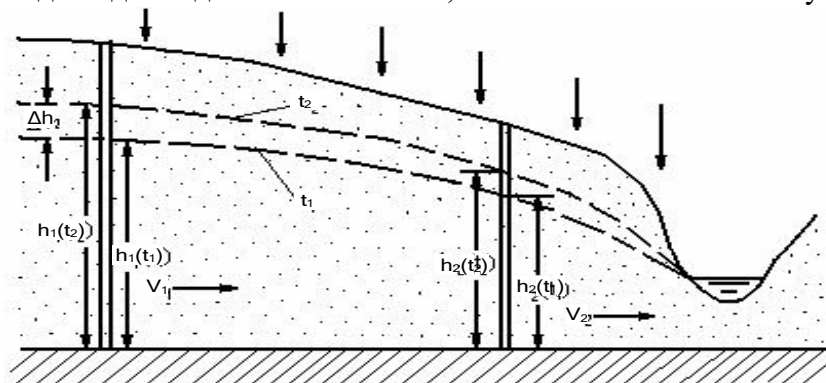


Рис. 2. Схема безнапірного неусталеного нерівномірного потоку:
 V_1, V_2 – швидкість руху підземних вод у перерізах I та II відповідно;
 $h_1(t_1), h_1(t_2), h_2(t_1), h_2(t_2)$ – відповідно рівні ґрунтових вод на час t_1, t_2 у перерізах I та II;
 Δh – різниця рівнів на час t_1 і t_2 у конкретному перерізі та перерізі II

Напірна фільтрація спостерігається у водоносних горизонтах, насичених на всю потужність, перекритих водотривками шарами і в яких гідростатичний тиск перевищує атмосферний. При розкритті таких горизонтів свердловинами рівень води в них піднімається вище покрівлі горизонту.

При усталеному (стаціонарному) русі підземних вод параметри фільтраційного потоку (потужність, швидкість руху, гідродинамічний напір) у кожному конкретному перетині потоку постійні в часі, хоча в різних перетинах вони можуть відрізнятися.

Неусталена фільтрація характеризується змінними в часі параметрами потоку підземних вод у кожному конкретному перетині (див. рис. 2). Причини неусталених фільтраційних процесів такі: 1) нерівномірна інфільтрація атмосферних опадів; 2) коливання рівня води в поверхневих водоймах, гідравлічно пов'язаних із ґрунтовими водами; 3) господарча діяльність людини пов'язана з будівництвом гідротехнічних споруд, зрошенням, осушенням тощо.

В багатьох випадках зміни рівня підземних вод настільки малі, що ними можна знехтувати при гідрогеологічних розрахунках і порівняно легко розв'язати фільтраційні задачі за формулами сталого руху.

Рівномірний рух підземних вод характеризується постійною швидкістю в усіх перетинах потоку. Прикладом такого руху можуть бути безнапірний або напірний потоки постійної потужності.

Нерівномірна фільтрація проявляється в тих горизонтах, де швидкість руху підземних вод змінюється на шляху потоку. Нерівномірний рух підземних вод є найбільш розповсюдженим у природі (див. рис. 2).

За гідравлічними особливостями рух підземних вод поділяють на ламінарний і турбулентний.

При *ламінарній* фільтрації (від лат. lamina – пластинка, смужка, шар) підземний потік характеризується тим, що окремі струмені води рухаються без розриву суцільності, з невеликими швидкостями, без перемішування між собою.

Ламінарна фільтрація підкоряється *лінійному закону фільтрації*.

Цей закон був відкритий в 1856 р. французьким гідравліком Ж. Дарсі. Для своїх дослідів він використав прилад (рис. 3), який складався з циліндра, завантаженого піском. У циліндр подавалася вода, щоб пісок увесь час був насиченим. У нижній частині циліндра був кран, через який вода виливалася у мірний посуд.

Таким чином, через пісок весь час відбувалася фільтрація. До верхньої та нижньої частин циліндра були приєднані п'езометри, за допомогою яких можна було міряти рівні води, що відповідали гідравлічному тиску у верхній та нижній частинах насиченого піску.

Дослідами встановлено, що кількість води, яка фільтрується через поперечний перетин циліндра з піском за одиницю часу, прямо пропорційна площі цього перетину та величині напірного градієнта, що дорівнює відношенню різниці рівнів у п'езометрах до відстані між ними. Математично встановлену залежність можна записати так:

$$Q = kFI, \quad (1)$$

де Q – витрата потоку через циліндр з піском, $\text{дм}^3/\text{с}$; k – коефіцієнт фільтрації, що характеризує проникність піску, $\text{см}/\text{с}$; F – площа поперечного перетину циліндра, см^2 ; I – напірний градієнт.

$$I = \frac{H_1 - H_2}{L} \quad (2)$$

де $H_1 - H_2$ – різниця рівнів води у верхній і нижній частинах циліндра з піском; L – довжина фільтруючої колони піску.

Ця залежність отримала назву залежності Ж. Дарсі.

Якщо поділити праву та ліву частини рівняння (2) на площу поперечного перетину F , матимемо:

Якщо поділити праву та ліву частини рівняння (2) на площу поперечного перетину F , матимемо:

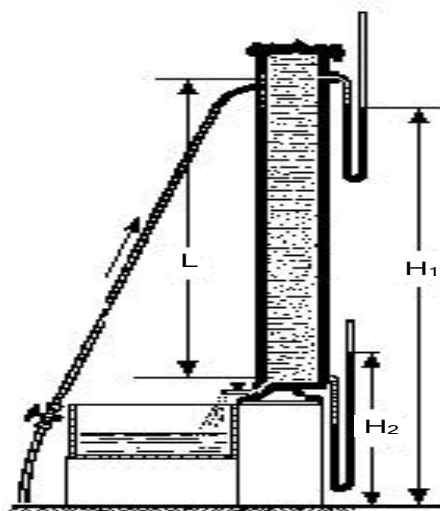


Рис. 3. Прилад Ж. Дарсі: L – довжина фільтруючої колони піску;
 H_1 та H_2 – рівні води у верхній і нижній частинах циліндра з піском

$$\frac{Q}{F} = \frac{kFI}{F}; \quad V = kI \quad (3)$$

де V – швидкість фільтрації.

Прямо пропорційна залежність між швидкістю фільтрації і напірним градієнтом у формулі (3) обумовила і назву закону Ж. Дарсі як *лінійний закон фільтрації*.

Якщо у формулі (3) прийняти $I = 1$, то

$$V = k \quad (4)$$

Звідси випливає, що *коефіцієнт фільтрації* за числовим значенням дорівнює швидкості фільтрації при напірному градієнті, який дорівнює 1. Він виражається в одиницях швидкості: м/добу; м/год; см/с тощо.

Коефіцієнт фільтрації залежить не тільки від властивостей фільтруючої гірської породи, а й від властивостей води, а саме від її щільності та в'язкості. Це зумовлює певні труднощі при фільтраційних розрахунках в умовах руху через ту саму породу води різної мінералізації. Тому введено поняття коефіцієнта проникності (k_n), який залежить тільки від властивостей гірської породи і з коефіцієнтом фільтрації пов'язаний залежністю:

$$k_n = \frac{\mu}{\rho g}, \quad (5)$$

де k_n – коефіцієнт проникності, см²; k – коефіцієнт фільтрації, μ – в'язкість води; ρ – щільність води, г/см³; g – прискорення сили тяжіння, м/с.

За одиницю коефіцієнта проникності прийнято 1 дарсі, що дорівнює 10⁻⁸ см².

При вивченні процесів фільтрації розрізняють два поняття швидкості: швидкість фільтрації та дійсну швидкість руху підземних вод.

При вивченні процесів фільтрації розрізняють два поняття швидкості: швидкість фільтрації та дійсну швидкість руху підземних вод.

Швидкість фільтрації (V), що використовується як розрахунковий параметр потоку, не є дійсною швидкістю руху води в гірських породах. У гідродинамічних розрахунках виявилось зручним реальний потік підземних вод у гірських породах замінювати фіктивним фільтраційним потоком. При цьому вважається, що вода тече через поперечний перетин водоносного горизонту суцільним потоком, тобто начебто гірської порода немає (як у водопровідній трубі).

Враховуючи, що рух води відбувається тільки по відкритих (активних) порах гірських порід, *дійсна швидкість руху* підземних вод V_∂ становить:

$$V_\partial = \frac{Q}{F \cdot n_a}, \quad (6)$$

де n_a – активна пористість гірських порід.

Зіставляючи формули (3) і (6) знаходимо:

$$V_\partial = \frac{V}{n_a} F. \quad (7)$$

У зв'язку з тим, що ефективна пористість завжди становить частки одиниці, з формул (6, 7) випливає, що дійсна швидкість води в гірських породах завжди більша, ніж швидкість фільтрації.

Лінійний закон фільтрації діє при ламінарному виді руху води. Він має місце в осадових породах, а також магматичних та метаморфічних породах при невеликих розмірах тріщин. Якщо вода рухається по великих тріщинах або карстових каналах, швидкість її може збільшуватися, і тоді спостерігається відхилення від закону Дарсі (ламінарний рух замінюється турбулентним).

У гідравліці для визначення режиму руху води застосовується число Рейнольдса R_e :

$$R_e = \frac{V_d d}{\nu}, \quad (8)$$

де V_d – дійсна швидкість води; d – діаметр пор; ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості води, який є відношенням в'язкості води до її щільності.

Встановлено, що при $R_e \leq 2300$ рух води ламінарний, а якщо більше, то турбулентний.

За Г.М. Каменським лінійний закон фільтрації можна застосувати для розв'язання практичних завдань при швидкостях руху води до 1000 м/добу.

Турбулентний рух підземних вод підпорядковується так званому *квадратичному закону фільтрації*. Він виражає залежність між напірним градієнтом і швидкістю фільтрації, або витратою потоку, при турбулентному режимі руху підземних вод. Його сформулювали незалежно один від одного Шезі і О.О. Краснопольський. Математично його можна записати так:

$$Q = k_k F \sqrt{I}, \quad (9)$$

або

$$V = k_k \sqrt{I}, \quad (10)$$

де k_k – коефіцієнт фільтрації за Краснопольським.

Оскільки за цими залежностями напірний градієнт прямо пропорційний квадрату швидкості фільтрації, закон прийняв назву квадратичного закону фільтрації або нелінійного.

У деяких потоках підземних вод на різних ділянках незалежно існують ламінарний і турбулентний режим фільтрації. Це буває, наприклад, в умовах руху води у тріщинуватих породах, де вузькі тріщини перетинаються із широкими. У вузьких тріщинах буде ламінарна фільтрація, а в широких – турбулентна. Така фільтрація має назву *змішаної фільтрації*.

За Смрекером, при змішаній фільтрації існує степенева залежність між швидкістю та напірним градієнтом:

$$Q = k_{cm} F^m \sqrt{I}, \quad (11)$$

або

$$V = k_{cm}^m \sqrt{I}, \quad (12)$$

де k_{cm} – коефіцієнт фільтрації за Смрекером; показник m – параметр, який змінюється від 1 до 2. Якщо $m = 1$, то формули (11, 12) перетворюються у формули Дарсі (2, 3); а якщо $m = 2$, то вони перетворюються у формулу Шезі – Краснопольського (9, 10); при змішаній фільтрації – $1 < m < 2$.

Для вивчення змішаної фільтрації часто застосовується формула Проні:

$$I = aV + bV^2, \quad (13)$$

де a і b – параметри, які залежать від розмірів частинок ґрунту і в'язкості води.

За малих значень швидкості фільтрації другий член у правій частині рівняння (13) є невеликим, їм зневажають і переходять до рівняння $I = av$, тобто до закону Дарсі. За

великій швидкості фільтрації другий член у рівнянні (13) перевищує перший член, і тоді, нехтуючи ним, отримаємо: $I=bv^2$, тобто формулу Шезі – Краснопольського.

Таким чином, формула Проні визначає загальні закономірності фільтрації підземних вод через пористе середовище. Формула Проні має більшу перевагу порівняно з формулою Смрекера, оскільки параметри a і b не залежать від гідродинамічних елементів руху V і I .

Як було вже сказано, у гідродинамічних розрахунках використовується поняття швидкості фільтрації, яка є фіктивною і відрізняється від дійсної швидкості руху підземних вод.

Тема 4.

Лекція № 5. Усталений (стаціонарний) рух підземних вод в неоднорідних водоносних горизонтах. 2 год.

Поняття, що вивчаються: шаруваті водоносні горизонти, зміна водопровідності порід, безнапірна і напірна фільтрація.

Приклади неоднорідних водоносних горизонтів. Закономірності фільтрації води в неоднорідних породах. Рівняння руху ґрунтових вод в шаруватому горизонтальному пласті.

Рух підземних вод у пластах з рівномірною зміною водопровідності в горизонтальному напрямку. Рух підземних вод в пластах з різкою зміною водопровідності порід. Рівняння руху води в неоднорідних пластах складної будови. Аналіз депресійних кривих в однорідних та неоднорідних водоносних горизонтах.

Безнапірна фільтрація. Напірна фільтрація. Рух підземних вод в міжрічковому масиві складної будови. Види руху ґрунтових вод у долинах річок.

Навички, які отримуються: вірно використання формул для визначення витрати ґрунтових вод в неоднорідних пластах.

ВИЗНАЧЕННЯ ВИТРАТИ ПОТОКУ ПІДЗЕМНИХ ВОД

Якщо водоносна товща має один і той же літологічний склад і відносно однаковий коефіцієнт фільтрації, вона називається *однорідною*. Рух підземних вод у водоносних горизонтах завжди тією чи іншою мірою є неусталеним. Однак, коли умови живлення та розвантаження підземних вод дуже мало змінюються в часі, то рух підземних вод можна розглядати як усталений, тобто практично незмінний у часі.

При вивченні руху підземних вод звичайно виникають завдання: 1) визначення витрати потоку підземних вод; 2) побудова депресійної кривої (для безнапірних водоносних горизонтів) або п'єзометричної кривої (для напірних водоносних горизонтів).

У подальшому розгляд розрахунків наведено стосовно однорідного усталеного руху потоку підземних вод.

1. Визначення витрати рівномірного потоку підземних вод

Фільтрація називається *рівномірною*, якщо по мірі руху підземних вод швидкість і витрата потоку не змінюються. Такий вид руху зустрічається в місцях, де водоносні горизонти не мають живлення і де відсутнє розвантаження. Рух підземних вод тут має транзитний характер.

У *безнапірних водоносних горизонтах* такий рух спостерігається за умови, що дзеркало підземних вод паралельне нижньому водотриву (рис. 1).

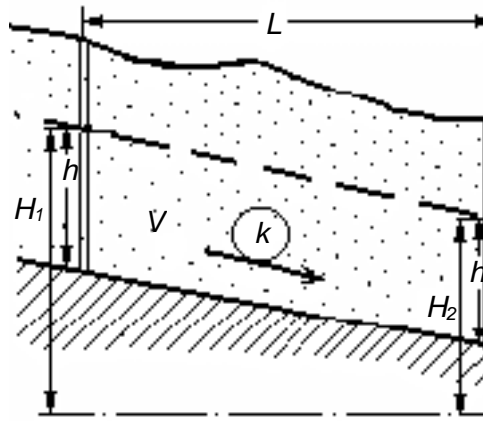


Рис. 1. Схема рівномірного безнапірного потоку:

H_1 і H_2 – позначки рівня підземних вод у свердловинах; h – потужність водоносного горизонту; V – швидкість потоку; k – коефіцієнт фільтрації

За формулою Дарсі

$$Q = kFl, \quad (1)$$

де l напірний градієнт

$$l = \frac{H_1 - H_2}{L}, \quad F = hb, \quad (2)$$

де b – ширина потоку.

Витрата потоку підземних вод, виходячи з (1), дорівнюватиме:

$$Q = khb \frac{H_1 - H_2}{L}. \quad (3)$$

Якщо ширину потоку b прийняти таким, що дорівнює 1 м, отримаємо залежність для визначення *одиночної витрати потоку* (витрата потоку, ширина якого дорівнює 1 м):

$$q = kh \frac{H_1 - H_2}{L}, \quad \text{або} \quad q = khl. \quad (4)$$

Знаючи величину одиночної витрати q легко знайти загальну витрату потоку за формулою:

$$Q = qb. \quad (5)$$

У *напірних водоносних горизонтах* рівномірна фільтрація спостерігається, якщо по мірі руху води спостерігається постійність потужності і напірного градієнту потоку (рис. 2).

Витрата потоку за формулою Дарсі дорівнюватиме:

$$Q = kmb \frac{H_1 - H_2}{L}, \quad (6)$$

а одиночна витрата потоку:

$$q = km \frac{H_1 - H_2}{L}, \quad \text{або} \quad q = kml. \quad (7)$$

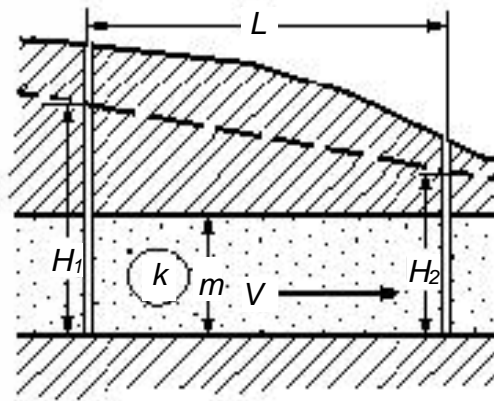


Рис. 2. Схема рівномірного напірного потоку:

H_1 і H_2 – позначки н'єзометричного рівня підземних вод у свердловинах;
 m – потужність водоносного горизонту; V – швидкість потоку; k – коефіцієнт фільтрації

У вертикальному розрізі рівномірного потоку поверхня води має вигляд прямої лінії. Для побудови ліній рівня підземних вод (безнапірних і напірних) в умовах рівномірної фільтрації достатньо відміток рівня у двох точках, розташованих у напрямку руху.

2. Визначення витрати нерівномірного потоку підземних вод

Нерівномірна фільтрація спостерігається, якщо по мірі руху підземних вод змінюється швидкість фільтрації та витрата потоку. Витрата потоку підземних вод за напрямком руху може змінюватися внаслідок живлення шляхом інфільтрації атмосферних опадів (у ґрунтових водоносних горизонтах), або перетікання з інших горизонтів. У вертикальному розрізі нерівномірного потоку за течією поверхня води має вигляд кривої лінії, яка називається *кривою депресії*.

У *безнапірному водоносному горизонті* (рис. 3) в напрямку руху води змінюються потужність і напірний градієнт (ухил поверхні).

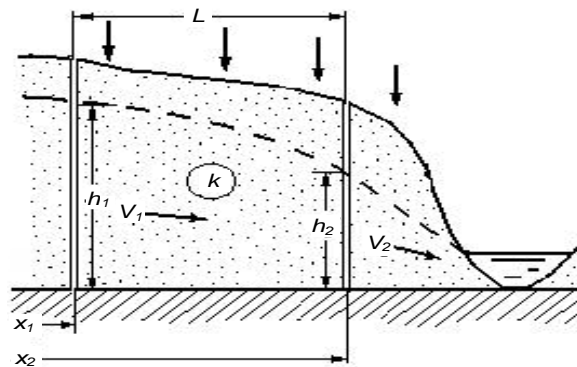


Рис. 3. Схема нерівномірного безнапірного потоку:

h_1 і h_2 – потужність горизонту в 1-ій та 2-й свердловинах,
 x_1 і x_2 – координати свердловин по осі x

Величина I змінюється по осі x нерівномірно. Значення її можна виразити формулою:

$$I = - \frac{\partial h}{\partial x} \quad (8)$$

Знак "-" у формулі 8 показує, що в напрямку руху підземних вод гідродинамічний напір зменшується.

Користуючись формулою (4), одиничну витрату нерівномірного потоку можна записати у вигляді:

$$q = -kh \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (9)$$

Розділивши перемінні, отримаємо:

$$q dx = -k h dh. \quad (10)$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$q \int_{x_1}^{x_2} \partial x = k \int_{h_1}^{h_2} -h \partial h. \quad (11)$$

Результатом рішення рівняння (10) буде:

$$q(x_2 - x_1) = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2}. \quad (12)$$

Звідси:

$$q = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2(x_2 - x_1)} = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}. \quad (13)$$

При розкладанні різниці квадратів на добуток суми і різниці отримаємо:

$$q = k \frac{h_1 - h_2}{L} \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}. \quad (14)$$

Оскільки $\frac{h_1 - h_2}{L} = I_{\text{сер}}$; $\frac{h_1 + h_2}{2} = h_{\text{сер}}$, рівняння (14) можна привести до рівняння Дарсі:

$$q = kh_{\text{сер}} I_{\text{сер}}. \quad (15)$$

Для умов *напірної нерівномірної фільтрації* витрата потоку визначається таким же чином (рис. 4)

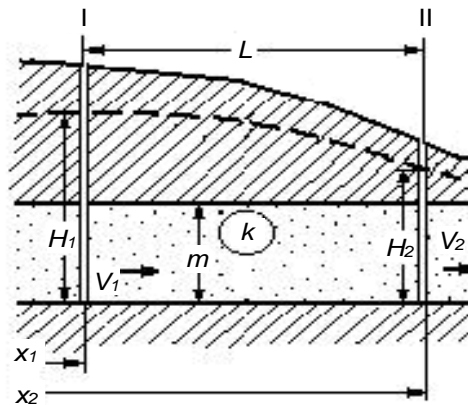


Рис. 4. Схема нерівномірного напірного потоку:
 H_1 і H_2 – відмітки п'єзометричного рівня у свердловинах I і II,
 інші позначення такі ж, як на рис. 1

Перемінний напірний градієнт по осі x можна записати у вигляді:

$$I = - \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (16)$$

Підставивши (16) у залежність (7), отримаємо:

$$q = -km \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (17)$$

Поділивши перемінні, отримаємо:

$$q dx = -k m dH. \quad (18)$$

Проінтегруємо вираз (18) у межах перетинів I і II:

$$q \int_{x_1}^{x_2} dx = km \int_{H_1}^{H_2} -dH. \quad (20)$$

$$q = km \frac{H_1 - H_2}{x_2 - x_1}. \quad (21)$$

$$q = km \frac{H_1 - H_2}{L}. \quad (22)$$

Знаючи одиничну витрату q можна визначити загальну витрату потоку шириною b за формулою (5).

Лекція № 6. . Побудова кривих депресії потоку підземних вод

Побудова кривої депресії потоку зводиться до визначення положення рівня води в перетинах, розташованих у проміжку між двома перетинами з відомими положеннями рівнів.

Для *грунтового нерівномірного потоку* при горизонтальному нижньому водотриві необхідно знати потужність горизонту у двох перетинах (h_1 і h_2) і відстань між ними (L).

Потужність горизонту у проміжному перетині, що знаходяться від 2-ого перетину на відстані x (рис. 23.5), розраховується, виходячи з формули Дарсі.

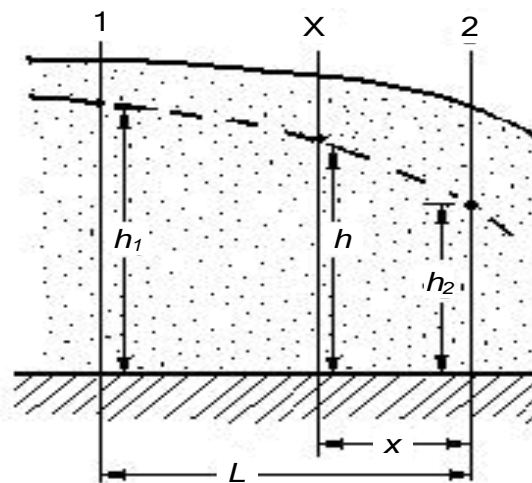


Рис. 5. Схема для визначення третьої точки кривої депресії ґрунтового нерівномірного потоку: L – відстань між перетинами; x – відстань між перетином II та X; h_1 , h_2 і h – потужність горизонту в 1, 2 та X перерізах

Між перетинами 1 і 2 одинична витрата за формулою (13) дорівнюватиме:

$$q = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}. \quad (23)$$

Звідси:

$$\frac{2q}{k} = \frac{h^2 - h_2^2}{L^2}. \quad (24)$$

Одинична витрата відносно перетинів x і 2 з потужністю горизонту h і h_2 :

$$q = k \frac{h^2 - h_2^2}{2x}; \quad \frac{2q}{k} = \frac{h^2 - h_2^2}{x^2}. \quad (25)$$

Оскільки величини q і k постійні, можна прирівняти праві частини залежностей (24) і (25):

$$\frac{h^2 - h_2^2}{x^2} = \frac{h^2 - h_2^2}{L^2}. \quad (26)$$

Звідси:

$$\frac{h^2 - h_2^2}{2} = \frac{x}{L} (h_1^2 - h_2^2), \quad (27)$$

$$h^2 = h_2^2 + \frac{x}{L} (h_1^2 - h_2^2), \quad (28)$$

$$h = \sqrt{h_2^2 + \frac{x}{L} (h_1^2 - h_2^2)}. \quad (29)$$

Задаючи різні значення x , можна визначити за формулою (29) значення h у різних перетинах потоку і, з'єднавши отримані точки, побудувати криву депресії.

Для побудови кривої депресії напірного нерівномірного потоку необхідно знати відмітки п'єзометричних рівнів у двох перетинах 1 і 2 з відстанню L між ними (рис. 6). Визначимо відмітку рівня H у перетині, що знаходиться на відстані x від перетину 2.

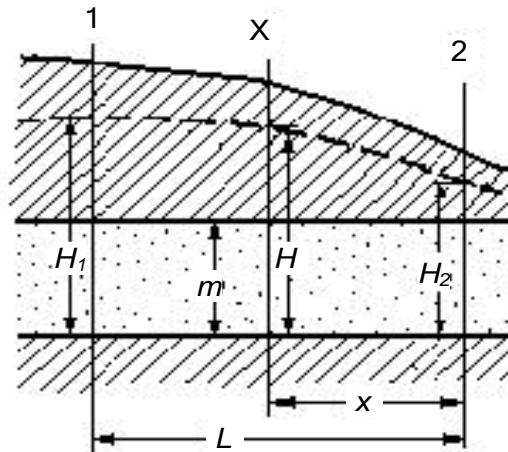


Рис. 6. Схема для визначення третьої точки кривої депресії напірного нерівномірного потоку: m – потужність горизонту; L – відстань між перетинами; x – відстань між перетином II та X; H_1 , H_2 і H – відмітки п'єзометричного рівня горизонту в 1, 2 та X перерізах

Відповідно до перетинів 1 і 2, одинична витрата потоку розраховується за формулою (7). З неї випливає:

$$\frac{q}{km} = \frac{H_1 - H_2}{L}. \quad (30)$$

Відповідно до перетинів x і 2:

$$\frac{q}{km} = \frac{H - H_2}{L}. \quad (31)$$

Прирівнявши праві частини (30) і (31), отримаємо:

$$H - H_2 = \frac{x}{L} (H_1 - H_2), \quad (32)$$

і нарешті:

$$H = H_2 + \frac{x}{L} (H_1 - H_2). \quad (33)$$

Задаючи різні величини x у формулу (33), можна визначити положення різних точок кривої депресії та побудувати її.

Лекція № 7. Визначення витрати нерівномірного потоку підземних вод у неоднорідних водоносних горизонтах

У природних умовах звичайно розповсюджені *неоднорідні* за фільтраційними властивостями водоносні горизонти. Розглядаючи велику різноманітність умов залягання шарів гірських порід, Г.М. Каменський виділив три найбільш розповсюджені випадки неоднорідності водоносних горизонтів:

- а) двошаровий водоносний горизонт (нижній пласт більшої проникності);
- б) горизонти складної будови із пластами різної проникності;
- в) горизонти з різкою зміною водопроникних порід у горизонтальному напрямі.

Двошаровий водоносний горизонт розглядається за такими умовами: верхній пласт (меншої проникності) вміщує ґрунтові води, нижній, з більшою водопроникністю, розглядається як напірний (рис. 7).

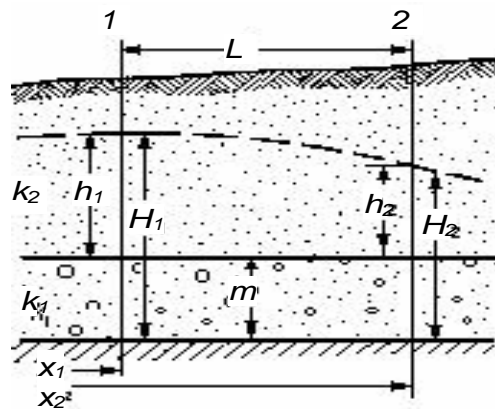


Рис. 7. Схема до розрахунку витрати підземних вод у двошаровому пласті: m – потужність напірного горизонту; L – відстань між перетинами; x_1 – координата перетину I; x_2 – координата перетину II; H_1 і H_2 – відмітки п'єзометричного рівня горизонту в 1 та 2 перерізах; h_1 і h_2 – відмітки рівня ґрунтових вод горизонту в 1 та 2 перерізах

Загальна витрата горизонту буде дорівнювати сумі витрат двох пластів.

$$q = -k_1 m \frac{\partial H}{\partial x} - k_2 h \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (34)$$

розділивши перемінні, отримаємо:

$$q dx = -k_1 m \partial H - k_2 h \partial h, \quad (35)$$

Проінтегруємо вираз (35):

$$q \int_{x_1}^{x_2} \partial x = k_1 m \int_{H_1}^{H_2} -\partial H + k_2 \int_{h_1}^{h_2} -h \partial h, \quad (36)$$

і отримаємо:

$$q(x_2 - x_1) = k_1 m (H_1 - H_2) + k_2 \frac{h^2 - h_2^2}{2}, \quad (37)$$

$$q = \frac{k_1 m (H_1 - H_2) + k_2 \frac{h^2 - h_2^2}{2}}{L}. \quad (38)$$

В багат шаровому водоносному горизонті витрату рівномірного потоку можна визначити за сумою витрат потоків у кожному шарі (рис. 8).

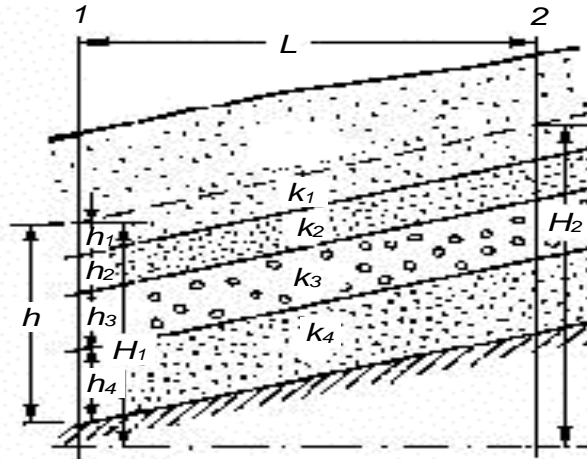


Рис. 8. Схема до розрахунку витрати потоку підземних вод у багат шаровому пласті: L – відстань між перерізами; h – сумарна потужність пласта, яка дорівнює $h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n$; $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ – коефіцієнти фільтрації в кожному пласті; H_1, H_2 – рівень ґрунтових вод у перерізах 1 та 2

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n, \quad (39)$$

$$q_1 = k_1 h_1 l; q_2 = k_2 h_2 l; \dots; q_n = k_n h_n l, \quad (40)$$

$$q = k_1 h_1 l + k_2 h_2 l + \dots + k_n h_n l. \quad (41)$$

Разом із тим, формулу для визначення одиничної витрати загального потоку можна записати і так:

$$q = k_{\text{сеп}} h l. \quad (42)$$

Тоді, маємо:

$$k_{\text{сеп}} h l = k_1 h_1 l + k_2 h_2 l + \dots + k_n h_n l, \quad (43)$$

$$k_{\text{сеп}} = \frac{k_1 h_1 + k_2 h_2 + \dots + k_n h_n}{h}. \quad (44)$$

Підставивши $k_{\text{сеп}}$ у формулу Дарсі (7), отримаємо:

$$q = \frac{k_1 h_1 + k_2 h_2 + \dots + k_n h_n}{h}, \quad (45)$$

$$q = \left(\frac{k_1 h_1}{1} + \frac{k_2 h_2}{2} + \dots + \frac{k_n h_n}{n} \right) \frac{H_2 - H_1}{L}. \quad (46)$$

Загальна витрата рівномірного потоку, ширина якого становить b , дорівнюватиме:

$$Q = \left[(k_{11} h_{11} + k_{12} h_{12} + \dots + k_{1n} h_{1n}) \frac{H_2 - H_1}{L} \right] \cdot b \quad (47)$$

У горизонтах з різкою зміною водопроникних порід у горизонтальному напрямку витрата нерівномірного потоку визначаються таким чином (рис. 9). На рисунку наведено схему руху підземних вод у горизонтальному пласті корінних порід, який має контакт з алювіальною терасою.

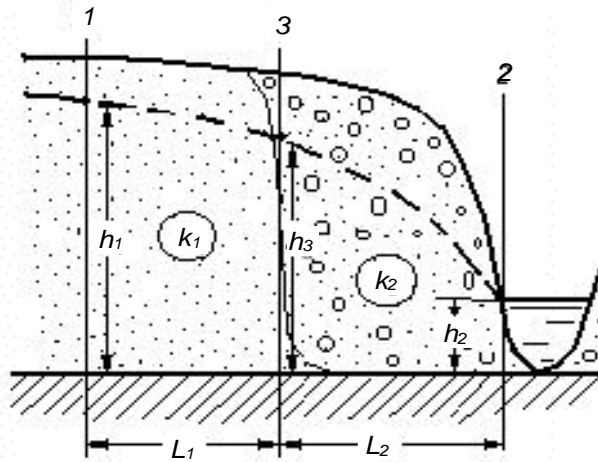


Рис. 9. Схема до розрахунку витрати потоку підземних вод при різкій зміні водопроникності пласта в напрямку руху: L_1 – відстань між перерізами 1 та 3; L_2 – відстань між перерізами 2 та 3; k_1, k_2 – коефіцієнти фільтрації в кожному пласті; h_1, h_2, h_3 – рівень ґрунтових вод у перерізах 1, 2 та 3

За формулою Дюпюї витрата потоку між перетинами 1 і 3 дорівнюватиме:

$$q = k_1 \frac{h_1^2 - h_3^2}{2L_1} \quad (48)$$

Звідси:

$$h_1^2 - h_3^2 = \frac{q2L_1}{k_1} \quad (49)$$

Для потоку відносно перетинів 3 і 2 витрата дорівнює:

$$q = k_2 \frac{h_3^2 - h_2^2}{2L_2} \quad (50)$$

Звідси:

$$h_3^2 - h_2^2 = \frac{q2L_2}{k_2} \quad (51)$$

Склавши рівняння (49) і (51), отримаємо:

$$h_1^2 - h_2^2 = q \left(\frac{2L_1}{k_1} + \frac{2L_2}{k_2} \right) \quad (52)$$

Звідси:

$$q = \frac{h^2 - h^2}{2 \left(\frac{L_1}{K_1} + \frac{L_2}{K_2} \right)}. \quad (53)$$

Саме за цією формулою можна визначити витрату потоку підземних вод у водоносних горизонтах, водопроникність яких різко змінюється в горизонтальному напрямку.

Несталий рух підземних вод. Звичайно, у природних умовах, а також в умовах, порушених господарською діяльністю людини, спостерігається неусталена фільтрація. Вона проявляється у зміні рівня підземних вод у часі, що обумовлює зміну напірного градієнта, швидкості фільтрації та витрати потоку підземних вод.

Основними причинами розвитку неусталеного руху є зміна напору на межах області фільтрації, зміна умов живлення водоносних горизонтів та штучний відбір підземних вод.

Формули несталого руху підземних вод широко використовуються при вивченні режиму підземних вод в умовах нерівномірної в часі інфільтрації, при визначенні витрат води з водойм, при розрахунках водозабірних споруд для централізованого водопостачання та розв'язанні інших теоретичних і практичних завдань.

Література: 1, 2, 3.

Розділ № 2

Тема 5.

Лекція № 8. Неусталений (нестационарний) рух підземних вод. .. 2 год.
Виноситься на самостійну роботу.

Поняття, що вивчаються: *неусталений рух, рівняння в кінцевих різностях.*

Головні види неусталеного руху. Рівняння неусталеного руху ґрунтових вод у кінцевих різностях. Аналіз рівняння неусталеного руху вод та його використання для вирішення різних гідрогеологічних задач.

Навички, які отримуються: *вірне використання рівняння в кінцевих різностях.*

Розділ №3.

Тема 6.

Лекція № 9. Усталений рух підземних вод до водозабірних споруд (радіальний потік підземних вод).. 6 год.

Поняття, що вивчаються: *радіальний потік підземних вод, ґрунтова і артезіанська досконалі свердловини, радіус впливу, шахтний колодезь, взаємодія свердловин.*

Типи водозабірних споруд. Рівняння притоку води до досконалих ґрунтових свердловин. Рівняння притоку води до досконалої артезіанської свердловини. Приток води до недосконалої ґрунтової свердловини. Приток води до неглибокого колодезя з проникним дном. Крива дебіту недосконалого ґрунтового колодезя. Крива дебіту артезіанського колодезя. Залежність дебіту від радіусу свердловини і радіусу впливу.

Рівняння депресійної кривої в районі впливу каналу (ріки). Приток води в канал досконалого і недосконалого типів.

Навички, які отримуються: вірне використання рівнянь для визначення дебіту ґрунтових і артезіанських свердловин і зниження рівнів в них.

РОЗРАХУНОК ПРИПЛИВУ ПІДЗЕМНИХ ВОД ДО ВОДОЗАБІРНИХ СПОРУД

1. Поняття про водозабірні споруди

Для водопостачання та інших потреб підземні води можуть видобуватися за допомогою спеціальних інженерних споруд, які називаються водозабірними. За особливостями розкриття водоносних горизонтів вони поділяються на вертикальні та горизонтальні.

До вертикальних водозаборів належать бурові свердловини, шахтні колодязі; до горизонтальних – каптажні галереї, канали, трубчасті дрени, кяризи тощо.

Залежно від того, які водоносні горизонти розкриваються – ґрунтові чи напірні, водозабірні споруди поділяються на ґрунтові й артезіанські.

Розрізняють досконалі і недосконалі гірничі виробки. Під *досконалими* розуміються виробки, які розкривають водоносний пласт на всю його потужність (рис. 1). Вода в такі виробки надходить через стінки в інтервалі, що відповідає потужності напірного (а) та ґрунтового пласта біля свердловини (б).

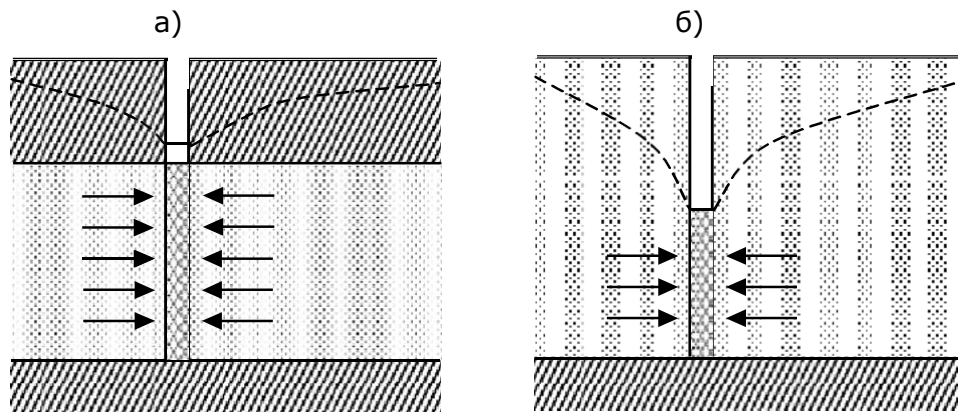


Рис. 1. Досконалі свердловини: а – напірний, б – безнапірний пласт

Недосконалими виробками називаються такі, в які вода надходить в інтервалі, що менший за потужність водоносного пласта.

Розрізняють два види недосконалих *вертикальних* гірничих виробок (свердловин, колодязів): 1) артезіанські з повністю затопленим фільтром, який може бути розташованим у різних частинах водоносного горизонту (рис. 1) – біля покрівлі (а), всередині (б), біля підшви (в); 2) ґрунтові (рис. 2) – з великим заглибленням фільтру під рівень ґрунтових вод з різноманітним положенням фільтра у водоносному горизонті (а, б, в), і частково затоплені (г).

У недосконалих колодязі вода може надходити одночасно і через стінки, і через дно, чи тільки через дно, чи тільки через стінки, в досконалих свердловини – тільки через стінки.

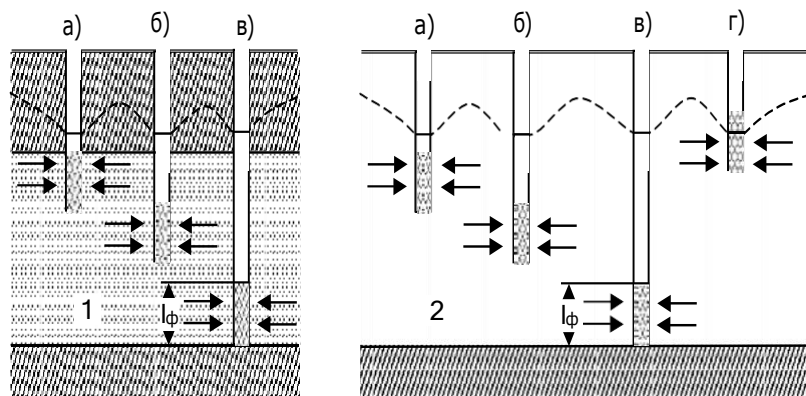


Рис. 2. Недосконалі артезіанські (1) та ґрунтові (2) свердловини: фільтри розташовані: а) біля покрівлі, б) всередині, в) біля підшови г) частково затоплені

Якщо зі свердловини чи колодязя відкачувати воду, то рівень води в них починає знижуватися від початкового – *статичного* рівня. Рівень, який знижується, називається *динамічним* (рис. 3).

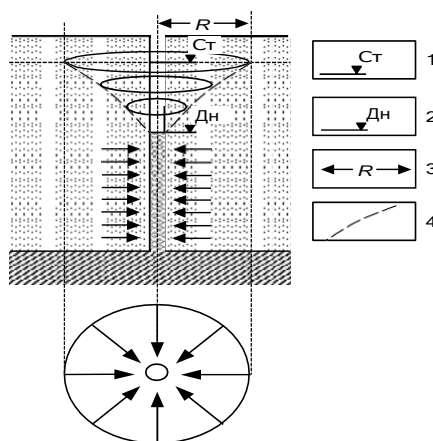


Рис. 3. Розріз і план воронки депресії при русі води до свердловини: 1 – статичний рівень; 2 – динамічний рівень; 3 – радіус впливу; 4 – крива депресії

При довготривалій відкачці у водоносному горизонті навколо колодязя (свердловини) утворюється лійкоподібне зниження рівня підземних вод. Найбільше воно у колодязі. На деякій відстані від колодязя зниження настільки мале, що динамічний рівень зливається зі статичним. Лійкоподібне зниження рівня води підземних вод прийнято називати *воронкою депресії*.

У вертикальному розрізі воронка депресії відображається у вигляді кривої лінії, яка зветься *кривою депресії*. Відстань від осі колодязя до точки, де динамічний і статичний рівні зливаються, називається *радіусом впливу*. В умовах усталеного руху положення воронки депресії постійне, а в умовах неусталеного руху – змінюється в часі.

Вперше теорію притоку води до колодязя розробив Дюпюї (1867 р.). При розрахунках припускається, що водопровідність пласта постійна, а нижній водотрив – горизонтальний. При цьому лінії току у плані мають вигляд радіусів, спрямованих до колодязя, а в розрізі – паралельних прямих (див. рис. 3).

2. Розрахунок притоку води до досконалого артезіанського колодязя

Розрахунок притоку води до досконалого артезіанського колодязя (рис. 5) виконується, виходячи з формули Дарсі:

$$Q = kFI. \quad (1)$$

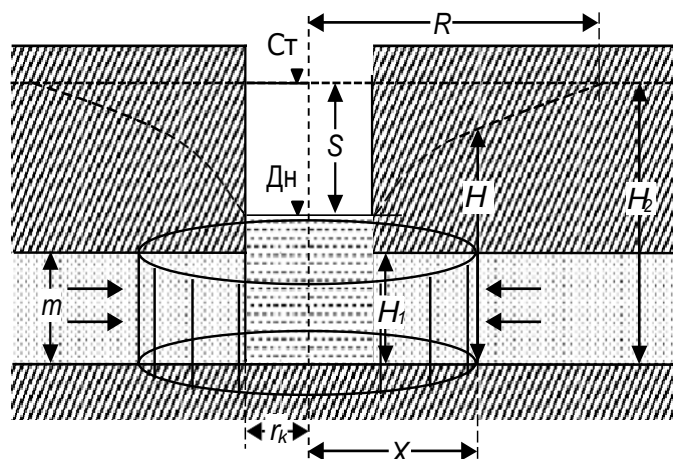


Рис. 4. Схема до розрахунку припливу води до досконалого артезіанського колодязя: m – потужність горизонту; r_k – радіус колодязя; X – відстань між центром колодязя та перетином X ; H_1 , H_2 і H – відмітки п'єзометричного рівня горизонту в колодязі, точці X та точці, де збігаються статичний та динамічні рівні; S – глибина воронки депресії, R – радіус воронки депресії

Оскільки напір H змінюється по осі x відповідно до положення кривої депресії, перемінним є і напірний градієнт I , який можна записати у вигляді

$$I = \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (2)$$

Площа поперечного перетину F дорівнює площі бічної поверхні циліндра з радіусом x і висотою m :

$$F = 2\pi x m. \quad (3)$$

Тоді формула Дарсі (1) прийме вигляд:

$$Q = 2\pi k x m \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (4)$$

Розділивши перемінні, отримаємо

$$Q \frac{\partial x}{x} = 2\pi k m \partial H. \quad (5)$$

Проінтегрувавши це рівняння від перетину, де $x = r_c$ і $H = H_1$, до перетину, де $x = R$ і $H = H_2$, отримаємо:

$$Q \int_{r_c}^R \frac{\partial x}{x} = 2\pi k m \int_{H_1}^{H_2} \partial H. \quad (6)$$

Звідси

$$Q \ln \frac{R}{r_c} = 2\pi k m (H_2 - H_1); \quad (7)$$

$$Q = \frac{2\pi k m (H_2 - H_1)}{\ln \frac{R}{r_c}}, \quad (8)$$

оскільки $H_2 - H_1 = S$, то:

$$Q = \frac{2\pi kmS}{\ln \frac{R}{r_c}}. \quad (9)$$

Ця формула була виведена французьким гідравліком Дюпюї і має його ім'я, використовується вона для визначення дебіту (витрати) колодязя Q при усталеному русі.

При неусталеному русі величини Q , S , R будуть перемінними в часі. На кожний конкретний момент часу радіус воронки депресії буде різний. На кожний момент часу (t) радіус впливу R_t розраховується за формулою:

$$R_t = 1,5\sqrt{at}, \quad (10)$$

де a – коефіцієнт п'єзопровідності.

Виходячи з цього, розрахунок дебіту колодязя при заданому значенні S у кожний конкретний момент часу t проводиться за формулою:

$$Q = \frac{2\pi kmS}{\ln \frac{R_t}{r_c}}. \quad (11)$$

3. Розрахунок притоку води до досконалого ґрунтового колодязя

Приплив води до досконалого ґрунтового колодязя (рис. 5) розраховується таким же чином, як і до артезіанського. У формулі Дарсі (1), оскільки потужність ґрунтового водоносного горизонту h змінюється по осі x відповідно до положення кривої депресії, напірний градієнт I є перемінним, і його можна записати у вигляді:

$$I = \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (12)$$

Площа поперечного перетину F на відстані x від осі колодязя дорівнює площі бічної поверхні циліндра з радіусом x і висотою h , тобто:

$$F = 2\pi xh, \quad (13)$$

і тоді дебіт колодязя Q за формулою (24.1) буде дорівнювати:

$$Q = 2\pi kxh \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (14)$$

Розділивши перемінні, отримаємо:

$$Q \frac{\partial x}{x} = 2\pi kh \partial h. \quad (15)$$

Після інтегрування в межах r_c і R , а також h_1 і h_2 :

$$Q \int_{r_c}^R \frac{1}{x} = 2\pi x \int_{h_1}^{h_2} h \partial h, \quad (16)$$

$$Q \ln \frac{R}{r_c} = \pi k (h_2^2 - h_1^2), \quad (17)$$

$$Q = \frac{\pi k (h_2^2 - h_1^2)}{\ln \frac{R}{r_c}}. \quad (18)$$

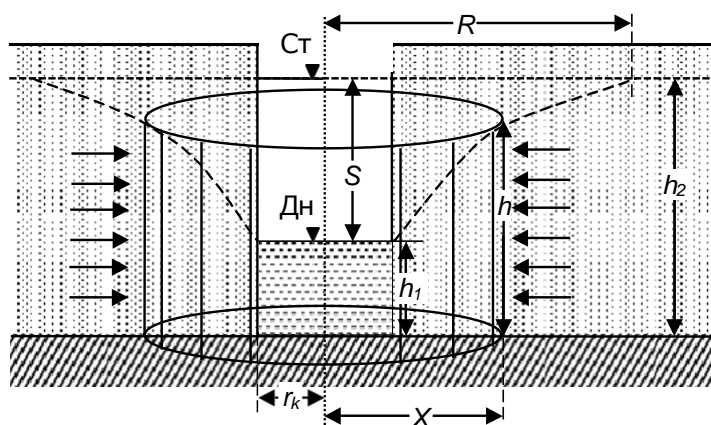


Рис. 5. Схема до розрахунку припливу води до досконалого ґрунтового колодязя: r_k – радіус колодязя; X – відстань між центром колодязя і перетином X ; h_1 , h_2 і h – відмітки рівня горизонту в колодязі, точці X та точці, де збігаються статичний та динамічні рівні; S – глибина воронки депресії; R – радіус воронки депресії

Оскільки:

$$h_1 = h_2 - S, \quad (19)$$

то

$$h_2^2 - h_1^2 = S(2h_1 - S), \quad (20)$$

і вираз (18) матиме вигляд:

$$Q = \frac{\pi k S (2h_1 - S)}{\ln \frac{R}{r_c}}. \quad (21)$$

Ця формула використовується для визначення дебіту (витрати) ґрунтового колодязя Q при усталеному русі.

При неусталеному русі величини Q , h_1 , R будуть перемінними в часі. При заданому значенні S на кожний момент часу (t) радіус впливу R_t розраховується за формулою:

$$R_t = 1,5 \sqrt{a_p t}, \quad (22)$$

де a_p – коефіцієнт рівнепровідності.

Розрахунок дебіту колодязя при заданому значенні S у кожний конкретний момент часу t проводиться за формулою:

$$Q = \frac{\pi k S (2h_1 - S)}{\ln \frac{R_t}{r_c}}. \quad (23)$$

Лекція № 10. Розрахунок притоку води до недосконалого колодязя

У недосконалому колодязі пласт працює не на всю потужність (див. рис. 2). Тому витрата недосконалого колодязя завжди менша, ніж досконалого. При тому ж самому дебіті зниження рівня води в недосконалому колодязі завжди більше. М. М. Верігін запропонував враховувати недосконалість колодязя введенням *поправки на недосконалість виробок* (ζ) у розрахункові формули.

Дебіт недосконалого артезіанського колодязя визначається за формулою:

$$Q = \frac{2\pi kmS}{\ln \frac{R}{r_c} + \zeta} \quad (24)$$

Аналогічний розрахунок виконується і для недосконалого ґрунтового колодязя:

$$Q = \frac{\pi k(h_2^2 - h_1^2)}{\ln \frac{R}{r_c} + \zeta} \quad (25)$$

Значення коефіцієнта ζ може бути визначене, виходячи з величин l_ϕ/m і m/r_c , де l_ϕ – довжина робочої частини колодязя (свердловини), m – потужність водоносного пласта, r_c – радіус водозабірної споруди.

5. Розрахунок припливу води до горизонтальних водозабірних споруд

Горизонтальні водозабірні споруди (галереї, кяризи, канали тощо) теж можуть бути досконалими та недосконалими, залежно від ступеня розкриття пласта. Розглянемо найпростіший випадок припливу води до прямокутного в розрізі каналу, що доведений до нижнього водотриву (рис. 6).

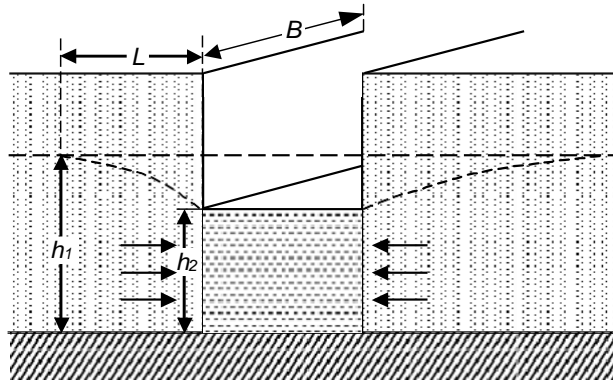


Рис. 6. Схема розрахунку притоку води до досконалого каналу: h_1 , h_2 – відповідно відмітки рівнів ґрунтового горизонту в точці, де збігаються статичний та динамічні рівні й колодязі; B – ширина потоку; L – радіус воронки депресії

Одинична витрата потоку з одного боку каналу визначається за формулою Дюпюї (13), позначивши через L відстань, на яку пошириться зниження рівня ґрунтових вод при роботі водозбірної споруди, з висотою природного рівня на зазначеній відстані h_1 :

$$q = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L} \quad (26)$$

Якщо довжина каналу B і приплив води до нього відбувається з обох сторін, то загальний приплив підземних вод до каналу становить:

$$Q = Bk \frac{h_1^2 - h_2^2}{L} \quad (27)$$

Горизонтальні водозабірні споруди можуть бути заглиблені у водоносний горизонт не на всю потужність. У такому випадку споруди вважаються недосконалими і в розрахунку вводяться спеціальні коефіцієнти.

Тема 7.

Рух підземних вод в тріщинуватих породах. 2 год.

Поняття, що вивчаються: тріщинуваті породи, поглинаючі свердловини.

Приток води до ґрунтової і артезіанської досконалих свердловин. Поглинаючі колодязі. Витрати води поглинаючого ґрунтового колодязя. Витрати води поглинаючої свердловини. Формула Смрекера. Визначення коефіцієнта фільтрації.

Навички, які отримуються: визначення притоків води до свердловин в тріщинуватих породах, вірне визначення коефіцієнта фільтрації тріщинуватих порід.

Лекція № 11. Розрахунок водопоглинаючого колодязя

Кожний колодязь (свердловина) спроможний не тільки давати воду при відкачці, але й поглинати її при наливах чи нагнітаннях.

У гідравлічному відношенні поглинання води тотожне відкачці, і всі розрахунки можна вести за звичайними формулами динаміки, якщо замінити в них величину зниження на величину напору, при якому відбувається поглинання води.

У процесі наливу чи нагнітання води у свердловину рівень в ній буде знаходитися на деякій висоті по відношенню до рівня води поглинаючого пласта. Внаслідок цього у пласті виникає рух води від свердловини (колодязя) в сторони. Через деякий час після початку поглинання в товщі порід біля свердловини формується своєрідна воронка депресії, яка подібна до переверненої депресійної воронки, що утворюється при відкачці зі свердловини (див. рис. 3). При нагнітанні в напірний пласт утворюється перевернена воронка депресії в п'єзометричній поверхні (рис. 6а); при нагнітанні у ґрунтовий колодязь (свердловину) формується воронка в реальній поверхні ґрунтових вод із найбільш високим рівнем у свердловині (рис. 6б).

Рух води при нагнітанні у колодязі (свердловині) описується тим же рівнянням Дюпюї, що і при відкачці, тому витрата води в артезіанський колодязь (свердловину) визначається за формулами (9) і (11) та (18) і (23) – для ґрунтового водоносного горизонту. При цьому, у формулах величина зниження рівня (S) замінюється величиною підвищення рівня ($-S$).

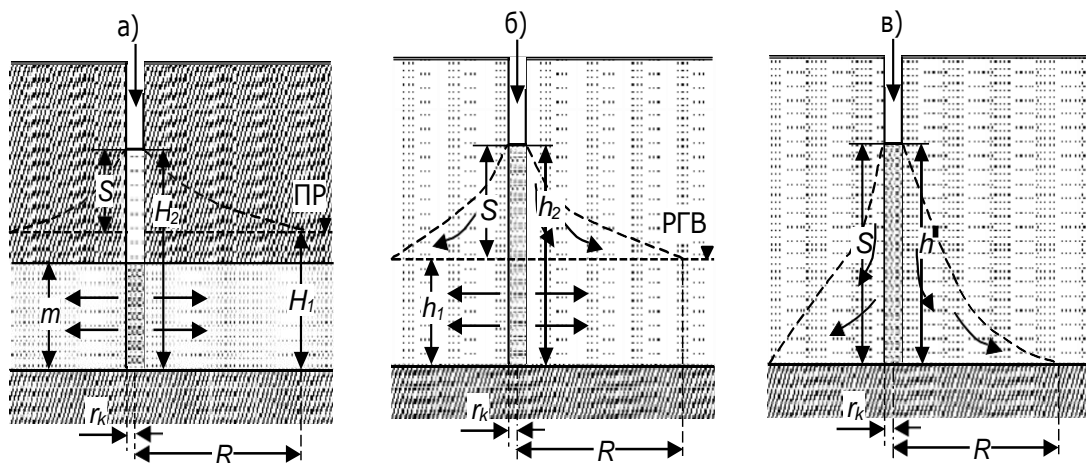


Рис. 6. Схема водопоглинаючих свердловин: а) напірний, б) безнапірний і в) налив у сухий пласти: m – потужність горизонту; r_k – радіус колодязя; H_1 , H_2 – відмітки п'єзометричного рівня відповідно до горизонту та після наливу в колодязь; h_1 , h_2 – відмітки рівня відповідно до ґрунтового горизонту та після наливу в колодязь; h – висота наливу; S – висота воронки депресії, R – радіус воронки депресії

Так, формула (9) матиме вигляд:

$$-Q = \frac{2\pi kmS}{\ln \frac{R}{r_c}} \quad (26)$$

а формула (18):

$$-Q = \frac{\pi k(h^2 - h_1^2)}{\ln \frac{R}{r_c}}. \quad (27)$$

При нагнітанні в ненасичені (сухі) породи (рис. 6в) у формулі (27) $h_1 = 0$, тому вона прийме вигляд:

$$Q = \frac{\pi kh^2}{\ln \frac{R}{r_c}}. \quad (28)$$

Тема 8.

Лекція № 12 13. *Неусталений рух води до свердловин (радіальний потік підземних*

вод). 8 год.

Поняття, що вивчаються: пружний режим фільтрації, неусталений радіальний потік підземних вод.

Рівняння Бусінеска радіального потоку підземних вод до ґрунтової досконалої свердловини в безмежному водоносному горизонті.

Пружний режим підземних вод з напірною поверхнею. Виявлення пружного режиму під впливом природних та штучних чинників.

Основні рівняння неусталеного руху підземних вод при пружному режимі фільтрації. Рівняння Бусінеска. Рівняння Тейса. Перехід від рівняння Тейса для неусталеного руху підземних вод з напірною поверхнею до рівняння неусталеного руху підземних вод із вільною поверхнею. Використання рівняння Тейса для визначення гідрогеологічних параметрів водоносного горизонту.

Навички, які отримуються: вірно використання рівнянь Бусінеска і Тейса для визначення зниження рівня води в свердловинах в напірнім і безнапірнім водоносних горизонтах, використання рівняння Тейса для визначення гідрогеологічних параметрів водоносного горизонту.

Література: [1, 2, 3].

Лекція 12–13. Досконалі свердловини в ізольованому напірному водоносному шарі при нестационарному режимі фільтрації

1. Диференціальне рівняння планово-радіального потоку в ізольованому напірному водоносному шарі

Для виведення рівняння планово-радіального потоку в ізольованому напірному водоносному шарі постійної водопровідності складемо баланс води циліндричного елементу шару безкінечно малої товщини dr за безкінечно малий період часу dt , задаючи сумарну інтенсивність живлення ω через покрівлю і підшову цього елементу.

Рис. Баланс води циліндричного елементу шару безкінечно малої товщини dr за безкінечно малий період часу dt

Нехай по внутрішній поверхні радіусом r в безкінечно малий елемент поступає об'єм води Q_r , який на виході із цього елемента отримує безкінечно мале прирощення $\frac{\partial Q_r}{\partial r} dr$.

Отже, сумарний об'єм води dV , яка поступає в елемент, буде дорівнювати:

$$dV = [Q_r - (Q_r + \frac{\partial Q}{\partial r} dr) + 2\pi r \omega dr] dr = (-\frac{\partial Q_r}{\partial r} + 2\pi r \omega) dr dt. \quad (1)$$

Цей об'єм води піде на зміну пружних запасів в елементі потоку, який для пружної віддачі буде дорівнювати:

$$dV = 2\pi r \mu_{\text{упр}} \frac{\partial H}{\partial t} dr dt \quad (2)$$

Порівняємо рівняння (1) і (2). Після скорочення на $dr dt$ отримаємо рівняння нерозривності:

$$2\pi r \mu_{\text{упр}} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial r} dr + 2\pi r \omega \quad (3)$$

Для визначення Q використаємо рівняння: $Q = 2\pi r T \frac{\partial H}{\partial r}$, змінюючи при цьому знак витрати, тобто: $Q = -2\pi r T \frac{\partial H}{\partial r}$ (4)

Підставимо у рівняння (3) вираз (4) для Q_r і отримаємо диференціальне рівняння планово-радіального потоку в ізолюваному напірному водоносному шарі постійної водопровідності:

$$\mu_{\text{упр}} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{T}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \omega, \quad (5)$$

$$\text{або} \quad \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\omega}{T}, \text{ де } a = \frac{T}{\mu_{\text{упр}}}. \quad (5a)$$

При відкачці води із свердловини в потоці підземних вод, коли початковий розподіл напорів $H = H_c(xy)$, змінюється в просторі, потік біля свердловини не буде мати радіального характеру, причому напори і природні потоки та виникаючі в процесі відкачки, будуть описуватися загальними рівняннями планової фільтрації ($q = T \frac{H_0 - H_c}{L}$).

Якщо інтенсивність площинного живлення ω в процесі відкачки не змінюється, то віднімаючи одне з одного рівняння, для напірного природного потоку H_t і напорів в процесі відкачки H , отримаємо зниження напору $S = H_e - H$ рівняння:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \quad (6)$$

в якому відсутнє інфільтраційне живлення, причому початкова умова для зниження буде дорівнювати 0, тому що $H_e = H$ при $t = 0$.

Таким чином, при незмінному живленні водоносного горизонту принцип суперпозиції (складання течій) дозволяє автоматично враховувати наявність природного потоку підземних вод, якщо відраховувати зниження рівня, створюваного відкачкою води, від рівня природного потоку. В такій постановці зниження напору S буде описуватися рівнянням радіального планового потоку при нульових початкових умовах.

Типовими граничними умовами на стінці свердловини в часі являються умови постійного (заданого) дебіту або постійного (заданого) напору (зниження рівня). Причому умова заданого дебіту переважає при відкачках із сильно водозбагачених водоносних горизонтів, де дебіт свердловин лімітується тільки потужністю насосів, а умова заданого напору характерна для відкачок із слабопроникних горизонтів і фонтануючих свердловин.

В радіальному потоці притік води по контуру свердловини рівномірний і ця умова має вигляд:

$$Q = 2\pi r T \frac{\partial H}{\partial r} \Big|_{r=0} = -2\pi r T \frac{\partial S}{\partial r} \Big|_{r=0} \quad (7)$$

2. Рішення основної задачі нестационарної планово-радіальної фільтрації. Рівняння Тейса

Основна задача нестационарної планово-радіальної фільтрації рішається для умови відкачки із свердловини з постійним дебітом Q , яка проходить починаючи з моменту часу $t = 0$ в необмеженому ізольованому напірному водоносному горизонті при відсутності природного потоку підземних вод.

Рішення поставленої задачі зводиться до інтегрування диференціального рівняння (5) при початкових умовах $H = H_0 = Const$ і граничній умові (7) на свердловині. Зазвичай така задача рішається в зниженнях напору $S = H_0 - H$, які задовольняють рівняння (6) і початкова умова стає рівною нулю.

Рішення такої задачі отримано вперше Ч. Тейсом (1935) і повторено Чарним (1956).

Розглянемо рішення Тейса.

Розповсюджуючи закон Дарсі на рух підземних вод з напірною поверхнею до свердловини, і порівнюючи цей рух із розповсюдження тепла в провіднику, Тейс скористався тим, що при русі підземних вод гідростатичний тиск аналогічний температурі, градієнт тиску – градієнту температури, коефіцієнт водопровідності – коефіцієнту термальної провідності і питома водовіддача – питомій тепловіддачі.

Виходячи з цих аналогій, Тейс застосував до теорії неусталеного руху підземних вод з напірною поверхнею рівняння Карслоу (1921) про поширення тепла постійної інтенсивності на площині з постійною теплопровідністю:

$$V_{(x, y, t)} = \frac{Q}{4\pi\eta t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4\eta t}}, \quad (8)$$

Де $V_{(x, y, t)}$ – зміна температури в будь-якій точці середовища з координатам x, y за час t (аналог зміни напорів);

Q – інтенсивність джерела або стоку, цими ж символами позначаються кількість тепла, яке віддає або отримує одиниця об'єму провідника в одиницю часу (аналог витрати джерела);

η – теплопровідність провідника поділена на віддачу (або на отримання) тепла одиницею об'єму (аналог коефіцієнту дифузії Кельвіна і аналог коефіцієнту п'єзопровідності);

t – час дії джерела (стоку).

Аналогічний вираз можна написати для миттєвого стоку в напірному водоносному горизонті одиничної товщини:

$$S^*(r, t) = \frac{g}{4\pi a(t - \tau)} e^{-\frac{r^2}{4\pi a(t - \tau)}} \quad (8a)$$

де $S^*(r, t)$ – функція зниження напору в радіусі r кругом точкового стоку;

g – інтенсивність стоку одиничної довжини (величина постійна);

a – коефіцієнт п'єзопровідності;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

τ – момент дії джерела (стоку).

Функція (8a) отримана при таких умовах: $t = 0$; $S^*(r, 0)_0 = S^*$; $r = \infty$

Розглянемо точковий стік, який діє не миттєво, в протязі деякого часу t . Для отримання функції зниження напору для цього випадку необхідно вираз (8a) проінтегрувати в інтервалі від $\tau = 0$ до $\tau = t$. В цьому випадку функція напору буде мати вигляд:

$$S(r,t) = \frac{g}{4\pi} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}}}{a(t-\tau)} d\tau \quad (9)$$

Введемо замість τ нову перемінну $z = \frac{r^2}{4a(t-\tau)}$. (10)

Не важко показати, що при цьому $d\tau = \frac{dz}{4az^2}$. (11)

Після підстановки (11) у (9) границі інтегрування набудуть вигляду: нижній буде $\frac{r^2}{4at}$, а верхній – ∞ . Тепер рівняння (9) можна переписати в такому вигляді:

$$S(r,t) = \frac{g}{4\pi a} \int_{\frac{r^2}{4at}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz \quad (12)$$

Перенесемо граничну умову на стінку свердловини і визначимо її дебіт (витрату) Q_0 при одиничній товщині водоносного шару:

$$Q_0 = -2\pi r k \frac{\partial S}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = Const, \quad (13)$$

де k – коефіцієнт фільтрації порід водоносного шару;
 r_0 – радіус свердловини.

Прийmemo до уваги, що: $\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{g e^{-\frac{r^2}{4at}}}{2\pi a r}$. (14) Тоді : $Q_0 = -2\pi r k \frac{\partial S}{\partial r}$

$$I_{r=r_0} = -\frac{kg}{a} e^{-\frac{r_0^2}{4at}}$$

Через те, що $\frac{r_0^2}{4at} \ll 1$, тобто $\frac{r_0^2}{4at} \cong 0$, то

$$Q_0 = -\frac{kg}{a} \text{ і } g = -\frac{Q_0 a}{k} \quad (15)$$

Підставимо (15) в (12) отримаємо:

$$S(r,t) = -\frac{Q_0}{4\pi k} \int_{\frac{r^2}{4at}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz = -\frac{Q_0}{4\pi k} E_i \left(-\frac{r^2}{4at} \right). \quad (16)$$

Дебіт досконалої свердловини, яка розкриває водоносний шар на всю його товщину m , дорівнює $Q = Q_0 m$.

Підставимо $Q_0 = \frac{Q}{m}$ у формулу (16) і отримаємо рівняння *Тейса*:

$$S = \frac{Q}{4\pi k m} \left[-E_i \left(-\frac{r^2}{4at} \right) \right] = \frac{Q}{4\pi T} \left[-E_i \left(-\frac{r^2}{4at} \right) \right], \quad (17)$$

Де S – зниження рівня води в будь-якій точці радіального потоку при відкачці води із свердловини (робота точкового стоку) з постійним дебітом Q ;

$T = km$ – коефіцієнт водопровідності;

$E_i \left(-\frac{r^2}{4at} \right)$ – інтегральна показова функція, значення якої знаходять в спеціальній таблиці;

r – відстань від вісі свердловини, із якої проводиться відкачка води, точки, де визначається зниження рівня;

a – коефіцієнт п'єзопровідності водоносного шару;

t – час відкачки води із свердловини.

Теоретично рівняння (17) використовується при таких умовах:

- – водоносний горизонт має напірну поверхню, являється однорідним, неграничним за своїми розмірами і має постійну водопровідність;
- свердловина, із якої проводиться відкачка води з постійним дебітом, являється досконалою.

Рівняння (17) являється одним із основних рівнянь теорії неусталеного руху радіального потоку підземних вод.

Це рівняння можна вивести безпосередньо із рівняння Бусінеска (5), що і зробив Чарний в 1963 р.

За кордоном функція $E_i\left(-\frac{r^2}{4at}\right)$ позначається через $W(u)$, де $u = \frac{r^2}{4at}$ і називається «функцією колодязя». В цьому випадку рівняння Тейса записується таким чином:

$$S = \frac{Q}{4\pi km} W(u) = \frac{Q}{4\pi T} W(u). \quad (17a)$$

Рівняння (17) і (17a) можна записати у вигляді збіжного ряду:

$$S = \frac{Q}{4\pi T} W\left(-0,5772 - \ln u + u - \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{18} - \frac{u^4}{96} + \dots\right), \quad (18)$$

де $C = 0,5772$ – постійна Ейлера.

При малих значеннях u в рівнянні (18) можна зневажити всіма доданками ряду починаючи з третього як величинами малими порівняно з двома першими.

$$S = \frac{Q}{4\pi T} (-0,5772 - \ln u). \quad (19)$$

Перетворюючи рівняння (19), отримаємо:

$$S = \frac{Q}{4\pi T} \left(-0,5772 - \ln \frac{r^2}{4at}\right) = \frac{Q}{4\pi T} \left(\ln \frac{4t}{r^2} - \ln 1,78\right) = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2,25at}{r^2} \quad (20)$$

Примітка:

Зниження рівня води в свердловині при відкачці за Тейсом для неусталеного руху напірних підземних вод визначається рівнянням: $S = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2,25at}{r^2} = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{1,5\sqrt{at}}{r}$. (21)

А для усталеного руху напірних підземних вод зниження рівня в свердловині визначається рівнянням:

$$S = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R}{r}, \text{ де } R - \text{ радіус впливу свердловини.} \quad (22)$$

Порівняємо рівняння (21) і (22) ми дійдемо до висновку, що при неусталеному русі радіус впливу свердловини дорівнює $R = 1,5\sqrt{at}$. Тобто він залежить від коефіцієнта п'єзопровідності і часу відкачки води із свердловини.

Таким чином, при малих значеннях $u = \frac{r^2}{4at}$ функцію $E_i(-u)$ можна замінити зворотною по відношенню до неї логарифмічною функцією: $-E_i\left(-\frac{r^2}{4at}\right) \approx \ln \frac{2,25at}{r^2}$.

Переходячи до десяткових логарифмів і враховуючи, що $\frac{2,3}{4\pi} = 0,183$ із формули (20) отримаємо:

$$S = \frac{0,183Q}{T} \lg \frac{2,25at}{r^2}. \quad (23)$$

В теорії неусталеного руху радіального потоку підземних вод рівняння (23) являється основним для розрахунку зниження рівня підземних вод при відкачці із напірного водоносного шару(горизонту) необмеженого за своїм простяганням. Похибка визначення зниження S за формулою (23) при $\frac{r^2}{4at} \leq 0,01$ не більше 5,7 %, а при $\frac{r^2}{4at} \leq 0,001$ – не перевищує 0,25 %.

Рівняння Тейса складено без врахування перетікання води через слабо проникні шари. Якщо таке перетікання має місце, то рівняння неусталеного руху радіального потоку за Бочевеком Ф. М. (1960) має вигляд:

$$S_0 = \frac{Q}{4\pi r_0} \left[2 \ln \frac{1,12B}{r_0} + E_i \left(- \frac{at}{B^2} \right) \right], \quad (24)$$

де S_0 – зниження напору в свердловині із радіусом r_0 ;
 B – коефіцієнт перетікання.

Формула (24) справедлива тільки самої свердловини. Якщо перетікання проходить через шари, які залягають вище або нище водоносного шару, з якого проводиться відкачка, то коефіцієнт перетікання розраховується за формулою:

$$B = \sqrt{\frac{km}{\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}}}, \quad (25)$$

де k і m – коефіцієнт фільтрації і товщина водоносного шару, із якого проводиться відкачка;

k_1 і m_1 – коефіцієнт фільтрації і товщина слабо проникного шару, який залягає в покрівлі водоносного шару;

k_2 і m_2 – коефіцієнт фільтрації і товщина слабо проникного шару, який залягає в підшві водоносного шару.

Зокрема, якщо перетікання підземних вод проходить тільки через верхній слабо проникний шар, тобто $k_2 = 0$, то $B = \sqrt{\frac{km m_1}{k_1}}$. (26)

Перехід від рівняння Тейса для неусталеного руху потоку підземних вод з напірною поверхнею до рівняння для неусталеного руху потоку підземних вод з вільною поверхнею

Для переходу рівняння Тейса для неусталеного руху потоку підземних вод з напірною поверхнею до рівняння для неусталеного руху потоку підземних вод з вільною поверхнею використовують раніше виведене співвідношення:

$$mH = \frac{h^2}{2},$$

тоді $2mH_0 = h_0^2$, $2mH = h^2$, $2m(H_0 - H) = h_0^2 - h^2$.

$$\text{Звідки: } S = \frac{h_0^2 - h^2}{2m}. \quad (27)$$

де h_0, h_c – п'єзометричні напори водоносного шару підземних вод з вільною поверхнею, які виражені через товщину потоку до і в процесі відкачки.

Підставимо (27) в рівняння (17) отримаємо рівняння Тейса для неусталеного руху радіального потоку підземних вод із вільною поверхнею:

$$h_0^2 - h^2 = \frac{Q}{2\pi k} \left[- E_i \left(- \frac{r^2}{4at} \right) \right]. \quad (28)$$

$$\text{Так як } h_0 - h_c = S, \text{ то } h_0^2 - h^2 = (2h_0 - S)S. \quad (29)$$

В цьому випадку рівняння (28) буде мати вигляд:

$$(2h_0 - S)S = \frac{Q}{2\pi k} \left[- E_i \left(- \frac{r^2}{4at} \right) \right] \quad (30)$$

В рівняннях (28), (30) коефіцієнт п'єзопровідності замінюється коефіцієнтом рівнепровідності $a = \frac{k h_{cep}}{\mu}$. При значеннях $\frac{r^2}{4at} \leq 0,1$ $(2h_0 - S)S = \frac{Q}{2k} \ln \frac{4at}{1,78 r^2}$

або

$$(2h_0 - S)S = 0,366 \frac{Q}{k} \lg \frac{2,25at}{r^2} \quad (31)$$

Лекція № 13. Використання рівнянь неусталеного руху радіального потоку підземних вод для визначення гідрогеологічних параметрів водоносних горизонтів

Подальші дослідження неусталеного руху радіального потоку підземних вод, які провели Ф. М. Бочевер, М. М. Біндеман, В. М. Шестаков, М. М. Веригін, І. А. Чарний, дозволили розробити методи визначення гідрогеологічних параметрів на основі даних дослідних відкачок води із свердловин при різних умовах залягання, живлення і дренажу водоносних горизонтів.

Ці методи включають визначення коефіцієнтів водопровідності і п'єзопровідності, коефіцієнта фільтрації, параметра водовіддачі (недостатку насичення), приведенного радіусу впливу свердловин. Всі методи засновані на графоаналітичних способах розв'язання рівняння Тейса (спосіб прямолінійної анаморфози цього рівняння). Цих способів шість.

Розглянемо способи, які найчастіше використовуються. Це методи логарифмічної залежності між зниженням рівня і часом після початку відкачки, а також метод еталонної кривої.

Методи логарифмічної залежності між зниженням рівня і часом після початку відкачки

Для визначення гідрогеологічних параметрів водоносних горизонтів з напірною поверхнею рівняння (23) $[S = \frac{0,183Q}{T} \lg \frac{2,25at}{r^2}]$ перетворимо наступним чином (Язвін Л.

С.):

$$S = \frac{0,183Q}{T} \lg \frac{2,25a}{r^2} + \frac{0,183Q}{T} \lg t. \quad (32)$$

Якщо прийняти, що:

$$\frac{0,183Q}{T} \lg \frac{2,25a}{r^2} = A, \text{ а } \frac{0,183Q}{T} = C,$$

то рівняння (32) буде виражати рівняння прямої лінії з кутовим коефіцієнтом C і початковою ординатою A :

$$S = A + C \lg t \quad (32a)$$

Це рівняння вирішується наступним чином:

1. Будуємо графік прямої $S = f(\lg t)$ в координатах $\lg t$ і S за даними замірів зниження рівня води в свердловині при відкачці $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ за час t_2, t_3, \dots, t_n після початку відкачки (рис.).

Рис. . Графік прямої $S = f(\lg t)$ в координатах $\lg t$ і S за даними замірів зниження рівня води в свердловині при відкачці

2. На побудованій прямій необхідно взяти дві довільні точки M і N . Знайдемо проєкції цих точок на вісь $\lg t$ і S отримаємо значення S_1 і $\lg t_1$ та S_2 і $\lg t_2$.

3. Розрахуємо коефіцієнт C за формулою:

$$C = \frac{S_2 - S_1}{\lg t_2 - \lg t_1}, \quad (33)$$

де S_2 і S_1 – зниження рівня води в свердловині в момент часу t_2 і t_1 після початку відкачки.

4. Визначимо величину ординати A безпосередньо із графіка, як довжину відрізка на вісі ординат S .

5. Після визначення коефіцієнтів C і A розрахуємо коефіцієнт водопровідності водоносного горизонту (T) і логарифм коефіцієнта п'єзопровідності за формулами:

$$T = \frac{0,183 Q}{C} \quad (34)$$

$$\lg a = 2 \lg r - 0,35 + \frac{A}{C}. \quad (35)$$

Взявши антилогарифм від отриманого числа за формулою (35), отримаємо значення коефіцієнта п'єзопровідності a .

При розрахунках за даними зниження рівня води в дослідній свердловині приймається, що $r = r_c$ (r_c – радіус дослідної свердловини), а при розрахунках за даними зниження рівня води в спостережній свердловині приймається, що $r = r_1$ (r_1 – відстань від дослідної свердловини до спостережної свердловини).

Для визначення гідрогеологічних параметрів водоносного горизонту із вільною поверхнею використовується рівняння (31) $[(2h_0 - S)S = 0,366 \frac{Q}{k} \lg \frac{2,25at}{r^2}]$.

Якщо прийняти, що:

$$\frac{0,366Q}{k} \lg \frac{2,25a}{r^2} = A, \text{ а } \frac{0,366Q}{k} = C,$$

то рівняння (31) буде виражати рівняння прямої лінії з кутовим коефіцієнтом C і початковою ординатою A :

$$S(2h_0 - S) = A + C \lg t. \quad (36)$$

Для розв'язання рівняння (36) використовується той же графоаналітичний метод; за даними відкачки будується графік прямої $S(2h_0 - S) = f(\lg t)$ (рис.), потім з графіка визначається величина A , як довжину відрізка на вісі ординат $S(2h_0 - S)$, потім розраховується кутовий коефіцієнт C за формулою:

$$C = \frac{S_2(2h_0 - S_2) - S_1(2h_0 - S_1)}{\lg t_2 - \lg t_1}, \quad (37)$$

де h_0 – п'єзометричний напір до початку відкачки, виражений через водо насичену товщину водоносного горизонту із вільною поверхнею.

Рис. . Графік прямої $S(2h_0 - S) = f(\lg t)$ в координатах $\lg t$ і $S(2h_0 - S)$ за даними замірів зниження рівня води в свердловині при відкачці

Після визначення коефіцієнтів C і A розраховується коефіцієнт фільтрації (k) і логарифм коефіцієнта рівнепровідності за формулами :

$$k = \frac{0,366 Q}{C} \quad (38)$$

$$\lg a = 2 \lg r - 0,35 + \frac{A}{C} \quad (39)$$

Взявши антилогарифм від отриманого числа за формулою (39), отримаємо значення коефіцієнта рівнепровідності a .

Розрахувавши коефіцієнти п'єзопровідності (рівнепровідності), можна визначити величину приведенного радіусу впливу свердловини за формулою:

$$R_{\pi}^2 = 2,25 at \text{ або } R_{\pi} = 1,5 \sqrt{at}, \quad (40)$$

де R_{π} – приведений радіус впливу свердловини;

a – коефіцієнт п'єзопровідності (рівнепровідності);

t – час після початку відкачки.

Виведення формули (40) витікає із таких міркувань: при довготривалій експлуатації (відкачці) водозабірної свердловини на відстані $r = R_{\pi}$ від вісі свердловини зниження рівня води $S = 0$. З математичної точки зору ця умова можлива,

якщо в рівняннях (23) $[S = \frac{0,183Q}{T} \lg \frac{2,25at}{r^2}]$ і (31) $[(2h_0 - S)S = 0,366 \frac{Q}{k} \lg \frac{2,25at}{r^2}]$ величина $\lg \frac{2,25at}{r^2} = 0$. Тоді $\frac{2,25aT}{r^2} = 1$.

Це можливо тільки тоді, коли $2,25at = R_{\Pi}^2 = r^2$. Підставляючи у формулу (23) $2,25at = R_{\Pi}^2 = r^2$ отримаємо видозмінену формулу Дюпюї для усталеного руху радіального потоку підземних вод з напірною поверхнею:

$$S = \frac{0,183 Q}{T} \lg \frac{R_{\Pi}^2}{r^2} = \frac{9,366 Q}{T} \lg \frac{R_{\Pi}}{r} \quad (41)$$

З (41) видно, що рівняння Тейса (23), яке виведено для неусталеного руху радіального потоку підземних вод з напірною поверхнею, можна замінити рівнянням Дюпюї для усталеного руху радіального потоку, якщо в нього ввести приведений радіус впливу R_{Π} , вираженого через коефіцієнт п'єзопровідності a .

Аналогічно, вводячи у формулу (31) величину R_{Π} , отримаємо видозмінену формулу Дюпюї для усталеного руху радіального потоку підземних вод з вільною поверхнею:

$$(2h_0 - S)S = \frac{0,73 Q}{k} \lg \frac{R_{\Pi}}{r} \quad (42)$$

Ці формули справедливі для досконалих свердловин.

При обробці результатів дослідних відкачок із недосконалих свердловин методика визначення гідрогеологічних параметрів залишається та сама, але в розрахункові залежності для визначення коефіцієнтів п'єзопровідності і рівнепровідності необхідно вводити поправку на недосконалість свердловин.

В цьому випадку розрахункова формула (35) $[\lg a = 2 \lg r - 0,35 + \frac{A}{C}]$ матиме такий вигляд:

$$\lg a = 2 \lg r - 0,35 + \frac{A}{C} - 0,434\xi, \quad (43)$$

де ξ – величина додаткового опору за рахунок недосконалості свердловини. Ця поправка визначається за спеціальними таблицями.

Метод еталонної кривої

Метод еталонної кривої вперше запропонував Ч. Тейс і полягає він в наступному: рівняння (17а) $[S = \frac{Q}{4\pi km} W(u) = \frac{Q}{4\pi T} W(u)]$ розв'язується шляхом суміщення двох кривих, накреслених на логарифмічному папері 1) кривої зниження в часі рівня води в спостережній свердловині $S = f(\frac{r^2}{t})$ і 2) еталонної кривої $W(u) = f(u)$.

Еталонна крива $W(u)$ будується в логарифмічному масштабі за функцією $W(u) = -E_i(-u) = -E_i(-\frac{r^2}{4at})$ в залежності від зміни аргументу u . Із збільшенням аргументу u ця функція зменшується.

Суміщення виконується наступним чином. Крива $S = f(\frac{r^2}{t})$ накладається на еталонну криву $W(u) = f(u)$ і переміщується по ній паралельно вісям координат до тих пір, поки більша частина її точок не співпаде з одним із ділянок еталонної кривої. На ділянці, де точки співпали, беремо довільно точку М. При проектуванні цієї точки М на координатні вісі відсікаються шукані значення функції: на вісі ординат знаходимо $W(u) = f(u)$ і $S = f(\frac{r^2}{t})$, а на вісі абсцис відповідні значення аргументів u і $\frac{r^2}{t}$ (див. рис.).

Рис. . Приклад суміщення двох кривих, накреслених на логарифмічному папері 1) кривої зниження в часі рівня води в спостережній свердловині $S = f\left(\frac{r^2}{t}\right)$ і 2) еталонної кривої $W(u) = f(u)$

Визначивши значення S , u , $W(u)$ і маючи постійний дебіт свердловини Q , розраховують коефіцієнт водопровідності водоносного горизонту T і коефіцієнт питомої водовіддачі S^* за формулами:

$$T = \frac{114,6 Q}{S} W(u) \quad (44)$$

$$S^* = \mu = \frac{uT}{1,87 \frac{r^2}{t}}, \quad (45)$$

де T – коефіцієнт водопровідності, $\left[\frac{\text{галон/доб}}{\text{фунт}}\right]$;

Q – дебіт свердловини, $\left[\frac{\text{галон}}{\text{хвил.}}\right]$;

$h_0 - h = S$ – зниження рівня водо в спостережній свердловині, [фути];

$W(u) = -E_i(-u)$ – інтегральна показникові функція;

r – відстань від дослідної свердловини до спостережної, [фути];

t – час після початку відкачки, доб.

Формула (45) – це вираження аргументу $u = \frac{r^2}{4at} = \frac{r^2\mu}{47t}$ перерахованого на англійську систему мір і розв'язана відносно μ .

Неупорядочені системи взаємодіючих свердловин

При побудові розрахункових залежностей для системи взаємодіючих свердловин, які працюють із заданим постійним дебітом, використовується принцип суперпозиції (метод складання течій), згідно якому в потоках з незмінною водопровідністю зміна (зниження) рівнів підземних вод під дією відкачки із системи свердловин визначається як сума знижень, спричинених дією кожної окремої свердловини.

Принцип суперпозиції для розрахунку системи взаємодіючих свердловин дає похибку не більше 1–2 %, якщо відстань між свердловинами перевищує 6 – 8 r_c радіусів свердловини. Для свердловин ця умова виконується практично завжди, що дає підстави використовувати принцип суперпозиції без будь-яких застережень.

Згідно з цим принципом зниження від дії системи взаємодіючих свердловин визначається як сума знижень від дії кожної із цих свердловин окремо, тобто якщо $S_1, S_2, S_3, \dots, S_i$ – зниження рівня підземних вод від дії свердловин 1, 2, 3, ..., i , то сумарне зниження при роботі всіх свердловин системи в точці M водоносного горизонту буде дорівнювати:

$$S_{\text{сум}} = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_i \quad (46)$$

При відкачках з постійним дебітом в однорідному безмежному ізольованому водоносному горизонті, де зниження рівнів під дією однієї свердловини визначається формулою Тейса (17) $S = \frac{Q}{4\pi T} \left[-E_i\left(-\frac{r^2}{4t}\right)\right]$ або $S = \frac{Q}{4\pi T} W(u)$, де $u = \frac{r^2}{4at}$,

загальне зниження рівня підземних вод визначиться рівнянням:

$$S = \frac{Q_1}{4\pi T} W(u_1) + \frac{Q_2}{4\pi T} W(u_2) + \frac{Q_3}{4\pi T} W(u_3) + \dots + \frac{Q_i}{4\pi T} W(u_i), \quad (47)$$

де $u_1 = \frac{r_1^2}{4a(t-t_1)}$; $u_2 = \frac{r_2^2}{4a(t-t_2)}$; $u_3 = \frac{r_3^2}{4a(t-t_3)}$; ...; $u_i = \frac{r_i^2}{4a(t-t_i)}$,
 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_i$ – відстань від свердловин 1, 2, 3, ..., i до розрахункової точки M ;
 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_i$ – дебіти свердловин 1, 2, 3, ..., i ;
 $t_1, t_2, t_3, \dots, t_i$ – час після початку відкачки води із цих свердловин (рис.).

Рис. . Схема взаємодіючих свердловин

При настанні квазістаціонарного режиму, який появляється при $u = \frac{r^2}{4at} <$

$0,3 - 0,9$, рівняння (47) матиме такий вигляд:

$$S = \frac{Q_1}{4\pi t} \ln \frac{2,25a(t-t_1)}{r_1^2} + \frac{Q_2}{4\pi t} \ln \frac{2,25a(t-t_2)}{r_2^2} + \frac{Q_3}{4\pi t} \ln \frac{2,25a(t-t_3)}{r_3^2} + \dots +$$

$$\frac{Q_i}{4\pi t} \ln \frac{2,25a(t-t_i)}{r_i^2} = \frac{Q_1}{4\pi t} [\ln 2,25a(t-t_1) - 2 \ln r_1] +$$

$$\frac{Q_2}{4\pi t} [\ln 2,25a(t-t_2) - 2 \ln r_2] + \frac{Q_3}{4\pi t} [\ln 2,25a(t-t_3) - 2 \ln r_3] + \dots +$$

$$\frac{Q_i}{4\pi t} [\ln 2,25a(t-t_i) - 2 \ln r_i], \quad (48)$$

Введемо в (48) безрозмірний дебіт свердловин, отримаємо:

$\kappa = \frac{Q_i}{Q}$, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_i$ – сумарний дебіт свердловин, отримаємо:

$$S = \frac{Q}{4\pi T} [\ln 2,25a + \kappa_1 \ln(t-t_1) + \dots$$

$$+ \kappa_i \ln(t-t_i) - 2 \kappa_1 \ln r_1 - \dots - 2 \kappa_i \ln r_i] =$$

$$= \frac{Q}{4\pi T} [\ln 2,25a + \ln(t-t_1)^{\kappa_1} + \dots + \ln(t-t_i)^{\kappa_i} - 2 \ln r_1^{\kappa_1} - \dots - 2 \ln r_i^{\kappa_i}]$$

(49)

Введемо в рівняння (49) розрахунковий час t_0 і розрахунковий радіус r_0 такі, що:

$$\ln t_0 = \ln(t-t_1)^{\kappa_1} + \dots + \ln(t-t_i)^{\kappa_i}; \quad (50)$$

$$\ln r_0 = \ln r_1^{\kappa_1} + \dots + \ln r_i^{\kappa_i}, \quad (51)$$

Після чого формулу (49) можна переписати наступним чином:

$$S = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2,25 a t_0}{r_0^2}, \quad (52)$$

яке відповідає за формою рівнянню $S = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2,25 a}{r^2}$ для відкачки води із досконалої свердловини в стаціонарних умовах.

Таким чином, в безмежному потоці підземних вод при квазістаціонарному режимі можна користуватися залежностями, отриманими для відкачки із одиночної свердловини вводячи в неї розрахункові значення радіусу r_0 і часу t_0 , які визначаються відповідно за формулами (50) і (51).

Такий розрахунковий спосіб приведення системи свердловин до одиночної вперше ввів Ф. Форхгеймер (1935) і має назву способу «великого колодзя».

РОЗРАХУНОК ГРУПИ ВЗАЄМОДІЮЧИХ СВЕРДЛОВИН

Майже всі водозабори і водознижуючі споруди складаються із 2-х і більше свердловин, які взаємодіють між собою. Зниження рівня води в реальній свердловині буде складатися із зниження в ній самій та зрізок від роботи всіх других свердловин.

Розрахунок групи взаємодіючих свердловин базується на використанні аналітичних залежностей, які отримані при розв'язанні диференціальних рівнянь фільтрації. Для простих гідрогеологічних умов рішення цих рівнянь реалізуються у вигляді аналітичних розрахунків. У більш загальному випадку (у тому числі в складних умовах) розв'язання диференціальних рівнянь здійснюється методом математичного моделювання.

Аналітичні розрахунки використовуються в усіх випадках, коли існує можливість представити гідрогеологічну обстановку у вигляді розрахункової фільтраційної схеми.

1. Гідродинамічні схеми водоносних горизонтів.

У природних умовах водоносні горизонти обмежені з усіх сторін. Однак на роботу групи взаємодіючих свердловин можуть впливати лише окремі межі, а іноді цей вплив зовсім відсутній. У залежності від кількості і форм меж, що впливають на роботу цих свердловин, виділяють такі основні типові схеми пластів: *необмежені (безмежні), напівобмежені і обмежені*. Серед обмежених пластів розрізняють: смугоподібний (пласт-смуга), кутовий (пласт-кут), круговий (пласт-коло).

2. Розрахунок групи взаємодіючих свердловин у необмежених пластах

Якщо природні межі водоносного горизонту знаходяться так далеко водозабору, або від ділянки, де потрібно понизити рівень підземних вод, що за весь час експлуатації t_e групи свердловин воронка депресії їх не досягне, розрахункова гідродинамічна схема називається "*необмеженим пластом*".

В умовах однорідного напірного необмеженого пласта зниження рівня (S) при постійному дебіті (Q_0) розраховується за формулою Тейса, яка для квазіусталеного режиму фільтрації має вигляд:

$$S = \frac{Q_0}{4\pi km} \ln \frac{2,25at}{r^2}, \quad (1)$$

де Q_0 – дебіт досконалої свердловини; km – коефіцієнт водопровідності пласта; a – коефіцієнт п'єзопровідності пласта; t – термін роботи свердловини; S – зниження рівня води в будь-якій точці пласта, розташованій на відстані r від свердловини.

Розрахунок групи взаємодіючих свердловин проводиться з використанням методу накладання течій (суперпозиції). Метод полягає в тому, що зниження рівня води в кожній із взаємодіючих свердловин дорівнює алгебраїчній сумі зрізок рівня води в цій свердловині і від роботи всіх інших свердловин, які працюють як одиночні.

$$S_p = S_0 + \sum_{i=1}^n \Delta S_i, \quad (2)$$

де S_p – прогнозне зниження рівня води в розрахунковій свердловині; S_0 – зниження рівня води в цій свердловині при її роботі як одиночної, тобто, без врахування взаємодії; $\sum_{i=1}^n \Delta S_i$ – сума знижень рівня води (зрізок рівня), що викликані роботою кожної іншої взаємодіючої свердловини ($i = 1, 2, \dots, n$), при їх роботі теж як одиночних (рис.1).

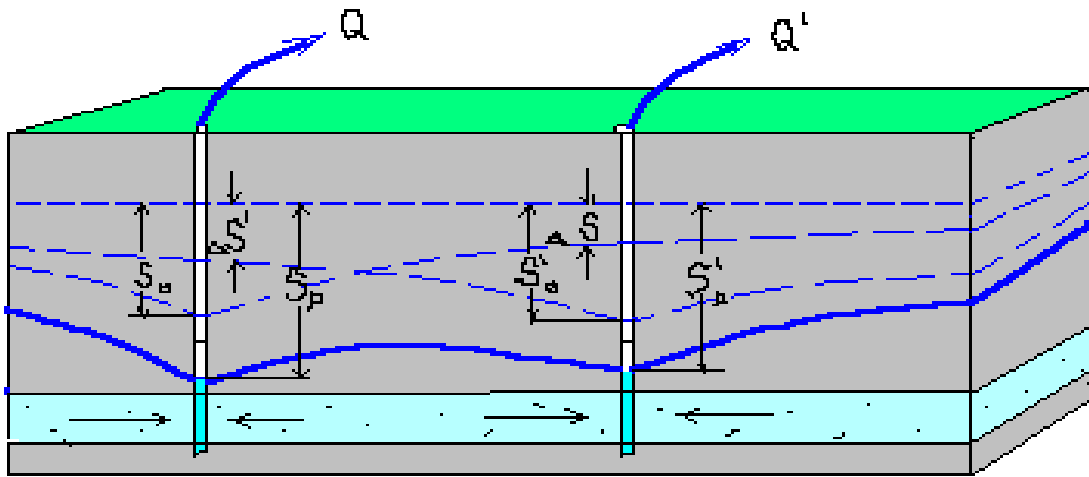


Рис. 1. Схема до розрахунку взаємодіючих свердловин

Наприклад, необхідно визначити зниження рівня води за рахунок відкачки підземних вод із трьох свердловин. Друга свердловина недосконала. Схема розташування свердловин наведена на рис. 2.

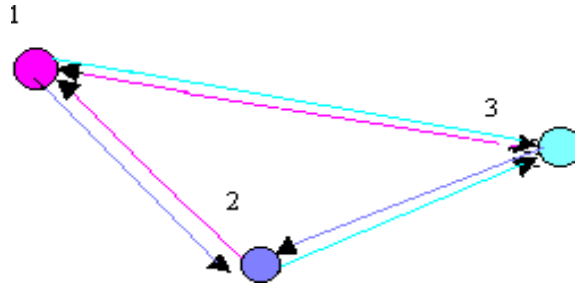


Рис. 2. Схема розташування свердловин

Згідно з (1) та (2), формула для розрахунку зниження рівня в досконалих свердловинах буде мати вигляд:

$$S_p = \frac{Q_0}{4\pi} \left(\frac{1}{km_0} \ln \frac{2,25at}{r_c^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{km_i} \ln \frac{2,25at}{r_i^2} \right), \quad (3)$$

де km_0 – водопровідність у зоні розрахункової свердловини; km_i – середнє значення водопровідності між розрахунковою свердловиною та свердловиною, що впливає на неї; r_c – радіус свердловини; r_i – відстань від розрахункової свердловини до інших свердловин.

Підставивши необхідні значення у формулу (3), отримаємо розрахункові зниження у свердловинах № 1 та № 3 за схемою (рис. 2)

Розрахункове зниження рівня в недосконалій свердловині визначається за залежністю:

$$S_{p(2)} = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{km_0} \left(\ln \frac{2,25at}{r_c^2} + 2\zeta \right) + \frac{1}{km_{1-2}} \ln \frac{2,25at}{r_{1-2}^2} + \frac{1}{km_{1-3}} \ln \frac{2,25at}{r_{1-3}^2} \right], \quad (4)$$

де ζ – гідравлічний опір, що обумовлений недосконалістю свердловини за ступенем розкриття водоносного горизонту; визначається за графіком у залежності від співвідношення l_ϕ/m та m/r_c .

3. Розрахунок групи взаємодіючих свердловин у напівобмежених водоносних горизонтах

У природних умовах водоносні горизонти обмежені з усіх боків. Але якщо на роботу системи свердловин впливає тільки одна межа, а інші знаходяться так далеко, що за весь час експлуатації будуть за межами воронки депресії, розрахункова гідродинамічна схема називається «напівобмеженим» водоносним горизонтом. Найчастіше така схема використовується як розрахункова у випадках, коли взаємодіючі свердловини розташовані поблизу річок або контактів водонасичених порід із слабо-проникними.

Межа водоносного горизонту по річці розглядається як межа з постійним напором ($H=const$), а межа із слабопроникними породами – як межа з постійною витратою ($q=0$). Урахування впливу прямолінійної межі на роботу групи взаємодіючих свердловин ґрунтується на застосуванні *методу дзеркальних відображень*. За цим методом реальний напівобмежений горизонт замінюється умовно необмеженим, в якому по контуру межі зберігається гранична умова.

Це досягається введенням у розрахунок дзеркально відображених від межі умовних свердловин із дебітами, що дорівнюють реальним, з протилежним знаком на межі з граничною умовою $H=const$ та з однаковим – на межі з умовою $q=0$.

В умовах напівобмеженого пласта з межею першого роду ($H=const$) протилежний знак дебіту відображеної свердловини відповідає наливу до неї води. Таким чином, на середині між реальною і відображеною свердловинами зберігається постійний в часі рівень (рис 3).

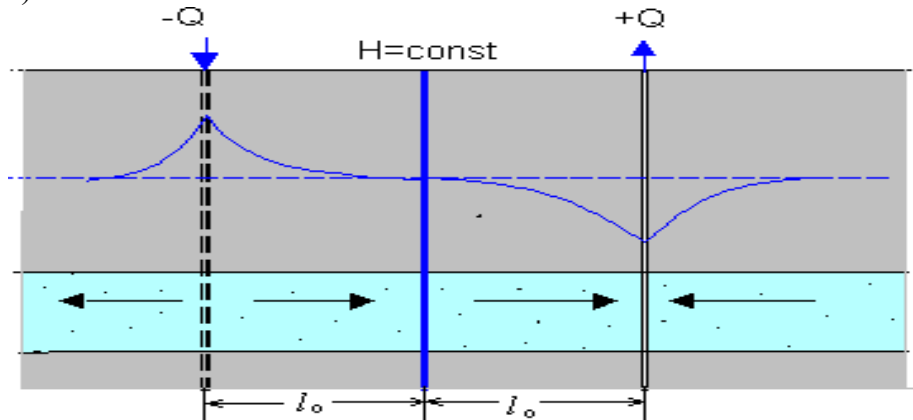


Рис. 3. Схема до розрахунку притоку підземних вод до свердловини в напівобмеженому водоносному горизонті з постійним напором на межі

Далі розрахунок ведеться для двох взаємодіючих свердловин (реальної та відображеної) в умовно безмежному пласті.

За методом *накладання течій* в реальній свердловині зниження рівня води S_p буде дорівнювати: $S_p = S_0 \Delta S^1$ (5)

де: S_0 – зниження рівня в реальній свердловині, що працює сама,

ΔS^1 – зрізка рівня в реальній свердловині від роботи відображеної свердловини.

За формулою Тейса:

$$S_0 = \frac{Q}{4\pi km} \ln \frac{2,25at}{r_c^2}, \quad (6)$$

$$\Delta S^1 = - \frac{Q}{4\pi km} \ln \frac{2,25at}{(2l_0)^2}, \quad (7)$$

$$S_p = \frac{Q}{4\pi km} \ln \frac{2,25at}{r_c^2} - \frac{Q}{4\pi km} \ln \frac{2,25at}{(2l_0)^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi km} \left(\ln 2,25at - \ln r_c^2 - \ln 2,25at + \ln (2l_0)^2 \right) = \frac{Q}{2\pi km} \ln \frac{2l_0}{r_c} \quad (8)$$

Якщо група взаємодіючих свердловин складається із кількох свердловин, то розрахункове зниження в кожній з них буде дорівнювати:

$$S_p = \frac{Q_0}{2\pi km} \ln \frac{\rho_0}{r_c} - \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi km} \ln \frac{\rho_i}{r_i}, \quad (9)$$

де S_p – зниження рівня води в розрахунковій свердловині з дебітом Q_0 при роботі її як одиночної та роботі інших свердловин з дебітом Q_i ; r_c і r_i – відповідно, радіус розрахункової свердловини та відстань до цієї свердловини від інших взаємодіючих свердловин

ρ_0, ρ_i – відповідно, відстані від розрахункової свердловини до її дзеркального відображення та до інших дзеркально відображених свердловин (рис.4).

В умовах напівобмеженого водоносного горизонту з межею другого роду ($q=const$) зниження в кожній із взаємодіючих свердловин розраховується за формулою:

$$S_p = \frac{Q_0}{2\pi km} \ln \frac{2,25at}{r_c \rho_0} - \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi km} \ln \frac{2,25at}{r_i \rho_i}, \quad (10)$$

де a – коефіцієнт п'єзопровідності; t – проектний термін відкачки води. Інші позначення ті ж самі, що і у формулі (9).

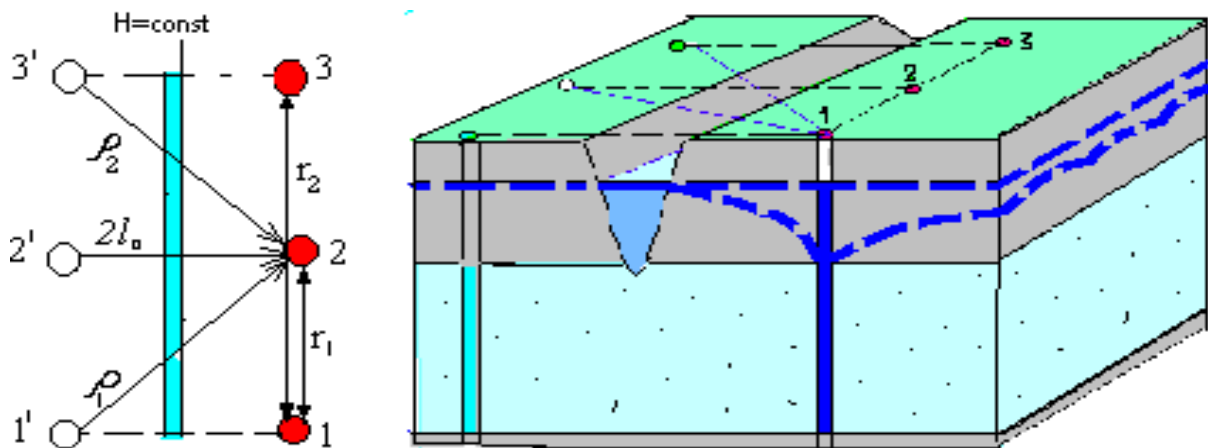


Рис. 4. Схема до розрахунку групи взаємодіючих свердловин в умовах напівобмеженого водоносного горизонту

Рівняння (5-10) виведені для досконалих свердловин, коли фільтр облаштовується на всю товщину водоносного горизонту. Якщо водоносний горизонт має значну товщину, то практично це важко зробити технічно та і недоцільно.

У зв'язку з цим доцільно водозабірні свердловини робити недосконалими. Це дозволяє знизити обсяги бурових робіт і система взаємодіючих свердловин буде раціональнішою.

Розрахунок зниження рівня в недосконалих взаємодіючих свердловинах виконується за формулою:

$$S_p = \frac{Q_0}{2\pi km} \left(\ln \frac{\rho_0}{r_c} + \zeta \right) + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi km} \ln \frac{\rho_i}{r_i} \quad (11)$$

де ζ – опір, що визначається недосконалістю свердловини.

Коефіцієнт недосконалості свердловини визначається методом підбору, виходячи з умови $S_p = S_{дон}$ і визначається за графіком у залежності від співвідношення l_ϕ / m та m / r_c .

4. Розрахунок групи взаємодіючих свердловин в обмеженому пласті-смузі

Обмежений пласт-смуга характеризується впливом двох прямолінійних меж, паралельних або таких, що можуть бути прийняті за паралельні.

Розрахункова схема пласта-смуги зустрічається в річкових долинах. Умовами на межах можуть бути: $H=const$, коли область фільтрації знаходиться між двома руслами річки на довгому острові, $q=0$ – коли межа проходить по контуру водонасичених відкладів із слабопроникними (непроникними) породами корінного берега і коли область фільтрації знаходиться між двома непроникними тектонічними розломами.

При відкачуванні із свердловини, яка закладена в пласті з двома паралельними межами, на початку, коли воронка депресії не досягає цих меж, зниження рівня відбувається так само, як і в необмеженому пласті. За Ф.М. Бочевеком, вплив цих меж починається через час $t = 0,5l^2/a$ (l – ширина смуги).

При розрахунках групи взаємодіючих свердловин в умовах пласта-смуги зниження S_p визначається із застосуванням методів дзеркальних відображень та суперпозиції [1, 2].

Наявність двох паралельних меж пласта викликає необхідність послідовного відображення від них не лише реально існуючих свердловин, але й усіх відображених. Кількість таких відображень теоретично нескінченна, але фактично значущими є перші 23 відображення

Через деякий час від початку роботи свердловини настає усталений режим фільтрації. Ф.М. Бочевеком шляхом додавання логарифмічних рядів отримав залежність для розрахунку зниження рівня води S_0 у свердловині з дебітом Q (рис.6):

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{Q}{2\pi km} R, \\ R &= \ln \frac{0,64L \cdot \sin \frac{\pi \cdot L_A}{L}}{r_c}. \end{aligned} \quad (12)$$

Зниження рівня в будь-якій точці M , розташованій на деякій відстані від діючої свердловини, дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{Q}{4\pi km} R', \\ R' &= \ln \frac{ch \frac{\pi y}{L} - \cos \frac{\pi(x + L_A)}{L}}{ch \frac{\pi y}{L} - \cos \frac{\pi(x - L_A)}{L}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Умовні позначення наведені на рис.6, chx визначається або за таблицями, або за залежністю:

$$chx = (e^x + e^{-x}) / 2. \quad (14)$$

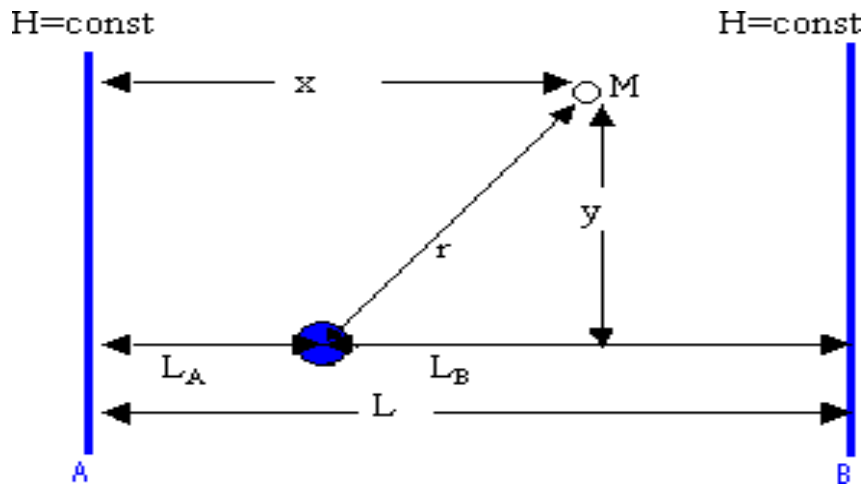


Рис.6. Схема до розрахунку свердловини

Формулами (13) і (14) можна користуватися, відповідно, за умов:
 $at/L^2 \geq 0,05 \dots 0,1$ і $at/L^2 \geq 0,5 \dots 0,8$ (15)

При роботі групи свердловин, розрахункове зниження в досконалій свердловині (S_p) з урахуванням впливу інших (методом суперпозицій) дорівнюватиме (рис. 7):

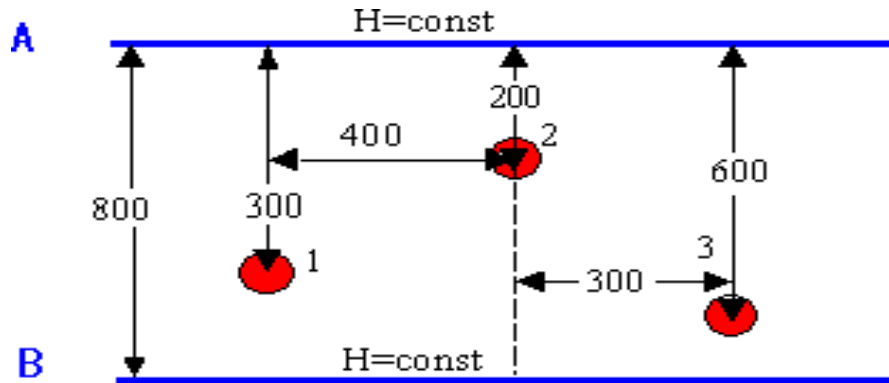


Рис. 7. Схема розташування водопонижуючих свердловин

$$S_p = \frac{Q_0}{2\pi km} R + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi km} R' \quad (16)$$

Для недосконалих свердловин:

$$S_p = \frac{Q_0}{2\pi km} (R + \zeta) + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi km} R'. \quad (17)$$

Розрахунок зниження в недосконалих свердловинах проводиться за формулою (13). Коефіцієнт недосконалості свердловин визначається за формулою [3]:

$$\zeta = \frac{Q_0 \cdot R - 2\pi TS}{Q_0}, \quad (18)$$

де

$$S = S_{\text{ЛБ}} - \sum_{i=1} \Delta S_i.$$

5. Розрахунок групи взаємодіючих свердловин в обмеженому пласті-куті

Схема кутового пласта приймається в тому випадку, коли дві межі пласта розташовані під певним кутом. Ця розрахункова схема може бути в закритій річці, що обмежує водоносний горизонт контуром у вигляді деякого кута, у місцях перетину під кутом контактів водовмісних порід із непроникними, тощо.

Вплив меж водоносного горизонту на роботу взаємодіючих свердловин визначається за допомогою методів дзеркального відображення та суперпозицій (рис.8).

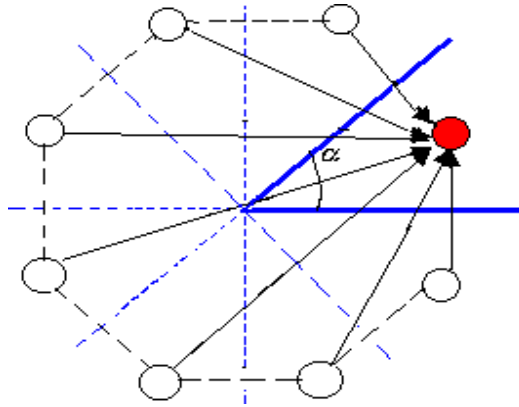


Рис. 8. Розрахунок свердловини в кутовому пласті

Кількість відображень в умовах кутового пласта прямує до нескінченності.

Винятком є випадок, коли кут $\alpha = \frac{\pi}{n}$ при $n = 1, 2, 3, \dots$

При виконанні цієї умови кінцевий цикл відображень має вигляд замкненої батареї, яка складена з реальної свердловини та $(2n-1)$ відображених. На рис.8 кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$ тому кількість відображених свердловин становить $N = 2 * 4 - 1 = 7$.

Знак дебіту відображеної свердловини залежить від умов на межах, (при умові $H = const$ знак дебіту – від’ємний, а при умові $q = const$ – додатній).

Додаючи вплив кожної відображеної свердловини з урахуванням знаку дебіту за методом накладання течій, можна отримати розрахункові формули для визначення зниження рівня води S в будь-якій точці пласта і в реальній свердловині.

Виведемо розрахункову залежність для цієї схеми, користуючись формулою Тейса для безмежного напірного горизонту (1).

Таким чином, на роботу свердловини будуть впливати дві межі (річка та літологічний контакт), розташовані під кутом одна до одної, і гідрогеологічні умови ділянки можна схематизувати у вигляді безнапірного пласта-кута з умовою 1-го роду ($H=const$) по річці і умовою 2-го роду ($q=0$) по літологічному контакту. Оскільки кут $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

число відображень буде 3.

За методом дзеркальних відображень та накладання течій зниження рівня води в реальній свердловині буде складатися із зниження в ній самій та зрізок від роботи трьох відображуваних свердловин: $S_p = S_0 + S_1 + S_2 + S_3$ (19)

За формулою (1):

$$S_p = \frac{Q}{4\pi km} \ln \frac{2,25at}{r_c^2} - \frac{Q}{4\pi km} \ln \frac{2,25}{\rho_1^2} - \frac{Q}{4\pi km} \ln \frac{2,25}{\rho_2^2} + \frac{Q}{4\pi km} \ln \frac{2,25}{\rho_3^2} = \frac{Q}{2\pi km} \ln \frac{\rho_1 \rho_2}{r_c \rho_3} \quad (20)$$

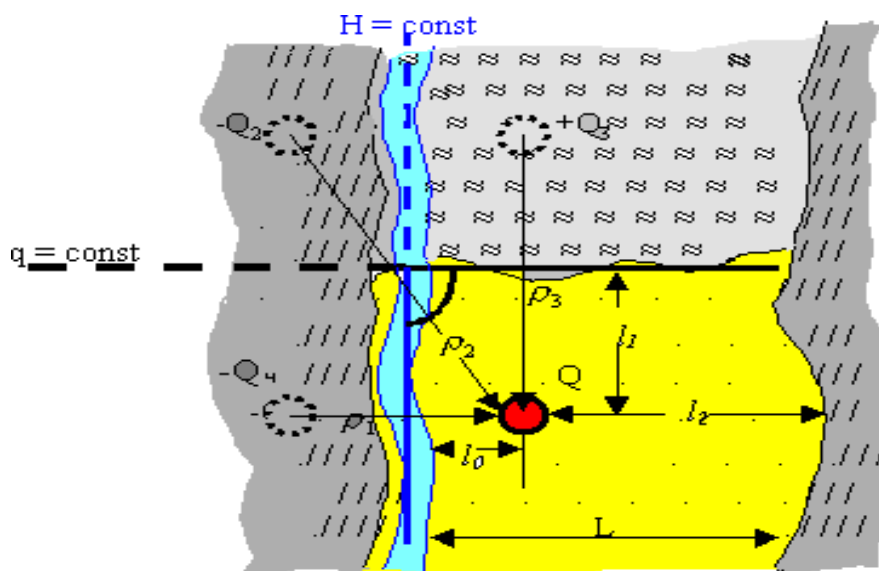


Рис.9. Схема до розрахунку водозабірної свердловини

Формулою (20) можна користуватися для безнапірних умов, якщо зниження в свердловині не перевищує 20% товщини водоносного горизонту.

Для переведу залежності (20) для умов безнапірної фільтрації скористуємося залежністю:

$$2mS_H = h^2 - (h - S_0)^2, \quad (21)$$

де: S_H і S_0 – зниження рівня води, відповідно, в напірному та безнапірному пластах; h – початкова товщина безнапірного; m – товщина напірного пласта.

Відповідно до (20 і 21):

$$2m \cdot \frac{Q}{2\pi km} \ln \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{r_c \cdot \rho_3} = h^2 - (h - S_0)^2, \quad (22)$$

Звідси:

$$S_0 = h - \sqrt{h^2 - \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{\rho_1 \rho_2}{r_c \rho_3}}. \quad (23)$$

Якщо безнапірний водоносний горизонт має велику товщину, то з техніко-економічних міркувань не має сенсу обладнувати свердловину фільтром на всю його товщину. В такому випадку використовуються недосконалі свердловини з різним положенням фільтра.

Зниження рівня підземних вод від роботи недосконалої свердловини з фільтром у верхній частині пласта розраховується за формулою:

$$S_p = h - \sqrt{h^2 - \frac{Q}{\pi k} \left(\ln \frac{\rho_1 \rho_2}{r_c \rho_3} + \zeta \right)}. \quad (24)$$

6. Розрахунок групи взаємодіючих свердловин умовах пласта-кола

Якщо водоносний горизонт розповсюджений на незначній площі, то через деякий час від початку відкачування із свердловини на формування воронки депресії починають впливати всі його межі.

У цьому випадку реальний контур горизонту може бути замінений правильним кільцевим контуром, і розрахунки взаємодії свердловин проводяться за схемою пласта-кола, радіус r_k , якого дорівнює:

$$r_k = \sqrt{\frac{F}{\pi}} \quad (25)$$

де F – площа розповсюдження водоносного горизонту.

Схема кругового пласта характерна для островів, мульд тощо.

Якщо гранична умова на межі $H=const$, то розрахунок взаємодіючих свердловин виконується, виходячи з умов усталеного режиму фільтрації. При цьому, відображені свердловини розташовуються на відстані d від центра кола (рис.10). За теорією інверсії відстань між центром кола та відображеною свердловиною розраховується за формулою:

$$d = \frac{r_h^2}{\delta}. \quad (26)$$

За методом накладання течій, зниження рівня води (S) в точці M , яка розташована на відстані r від свердловини, буде дорівнювати:

$$S = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{\rho \cdot \delta}{r \cdot r_h}. \quad (27)$$

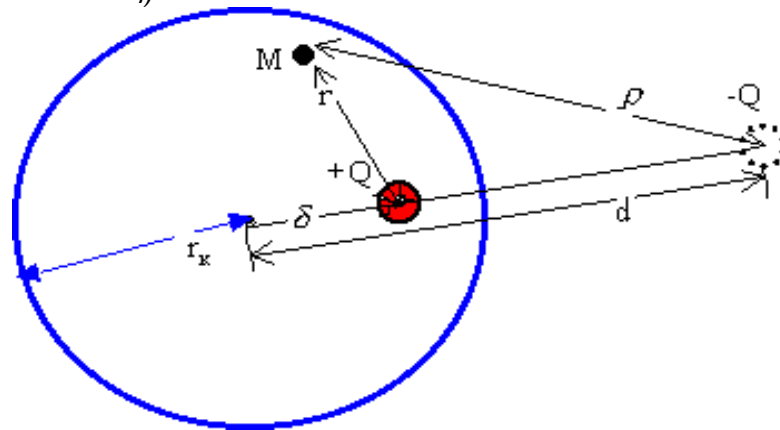


Рис.10. Схема до розрахунку свердловини в кругових пластах.

Зниження рівня в самій свердловині (S_0), коли $\rho = d - \delta$ і $r = r_c$, розраховується за залежністю:

$$S_0 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_h^2 - \delta^2}{r_c \cdot r_h}. \quad (28)$$

Якщо свердловина знаходиться в центрі кола ($\delta = 0$) з формули (28):

$$S_0 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_h}{r_c}. \quad (29)$$

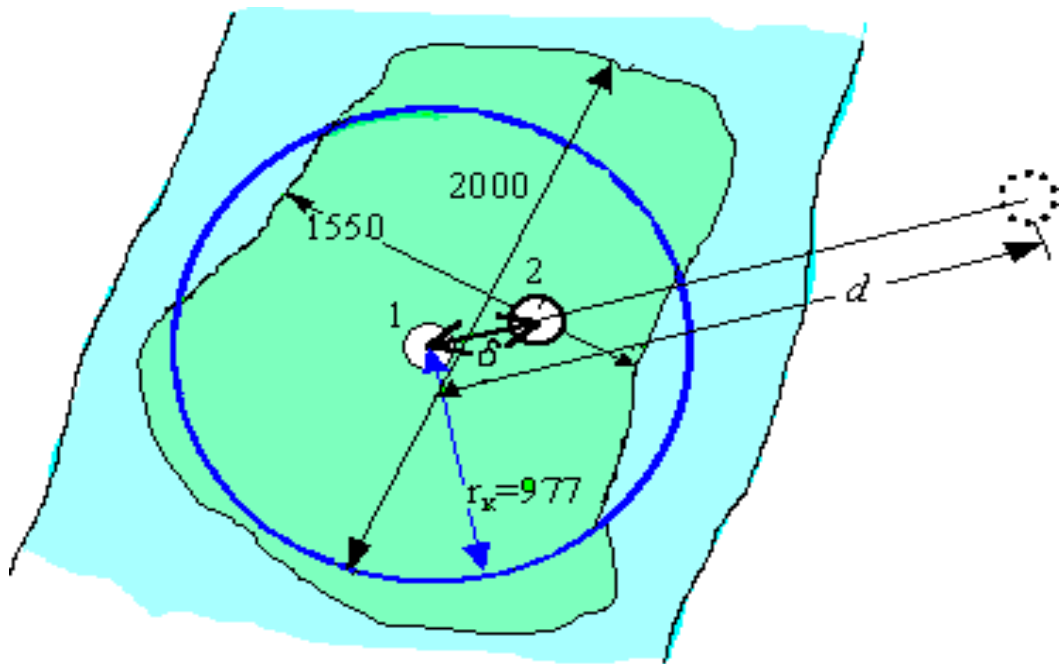


Рис.11. Схема до розрахунку взаємодіючих свердловин

Розрахунок зниження рівня у свердловині, що розташована в центрі кола, з урахуванням впливу іншої свердловини буде дорівнювати:

$$S_p(1) = S_1 + \Delta S_2, \quad (30)$$

де: S_1 визначається за формулою (29):

$$\Delta S_2 \text{ розраховується за формулою (26), прийнявши що} \quad (31)$$

$$r_\kappa = \delta; \rho = d = \frac{r_\kappa^2}{\delta} \quad \text{тоді: } \Delta S_2 = \frac{Q_2}{2\pi T} \ln \frac{r_h}{\delta};$$

Зниження в 2-й свердловині розраховується за формулою:

$$S_p(2) = S_2 + \Delta S_1, \quad (32)$$

де: S_2 - розраховується за формулою (28),

ΔS - розраховується за формулою (28), прийнявши - $r = \delta; \rho = d - \delta$

тоді:

$$\Delta S_1 = \frac{Q_1}{2\pi T} \ln \frac{r_h^2 - \delta^2}{r \cdot \delta}. \quad (33)$$

Лекція № 14. ВИКОРИСТАННЯ РІВНЯННЯ ТЕЙСА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ГІДРОГЕОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ВОДОНОСНОГО ГОРИЗОНТУ

Рівняння Тейса використовується для визначення гідрогеологічних параметрів водоносного горизонту. Їх визначення проводиться на основі методів еталонної кривої і прямолінійної анаморфози.

1. Метод еталонної кривої

Метод еталонної кривої полягає в складанні графіка залежності $lg=f[lg(t/r^2)]$ за даними досліджуваного свердловини і наступному суміщенні його з еталонною кривою – графіком залежності lgW від $lg(1/u)$ [1, 11]. Суміщення графіків, побудованих в однаковому масштабі, проводиться до задовільного їх збігу за більшістю точок за умови збереження паралельності координатних вісей (рис. 1.2). Знімаючи далі координати будь-якої точки суміщеного графіка lgS , lgW , $lg(t/r^2)$ і $lg(1/u)$, і визначають водопровідність T і п'єзопровідність a відповідно до рівнянь:

$$lg \frac{Q}{4\pi T} = lgS - lgW \text{ і } lg4a = lg \left(\frac{1}{u} \right) - lg \left(\frac{t}{r^2} \right). \quad (34)$$

Для зручності сполучення дослідної та еталонної кривих остання будується на кальці; для її побудови можна скористатися такими даними (табл. 1.1):

Таблиця 1.1

Дані для побудови еталонної кривої

$lg(1/u)$	-0,3	-0,15	0,0	0,15	0,3	0,5	0,7	1	1,3
lgW	-1,31	-0,943	-0,66	-0,433	-0,254	-0,062	0,086	0,26	0,393

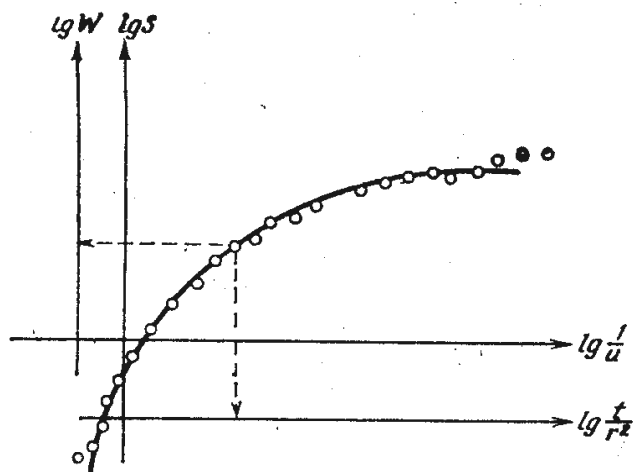


Рис. 1. Схема к определению параметров методом эталонной кривой

Необхідно відзначити, що побудовані в системі координат $lg-lg(t/r^2)$ графіки для різних спостережних свердловин повинні збігатися і за ступенем їх збігу можна судити про відповідність вихідного рівняння (1.2) реальним умовам фільтрації при відкачці, а також про ступінь однорідності і ізольованості горизонту, який досліджується.

Метод характерних точек

Метод характерних точек заснований на використанні для визначення параметрів характерних точек кривої зміни рівня в

спостережних свердловинах (точка початку реагування, точка перегибу, точка торкання). Істотного поширення в практиці дослідно-фільтраційних досліджень метод не одержав [1, 11].

В умовах квазіусталеної фільтрації, час настання якої t_k при точності заміни експонентної функції на логарифмічну до 5% визначається критерієм $t_k \geq 2,5(r^2/a)$,

можливе використання графоаналітичних і аналітичних методів, заснованих на логарифмічній залежності зниження рівня від часу, тобто на вихідних формулах (34).

Методи прямолінійної анаморфози (графоаналітичні)

Найбільш широким поширенням у практиці гідрогеологічних розрахунків користуються *методи прямолінійної анаморфози (графоаналітичні)* визначення гідрогеологічних параметрів, засновані на можливості подання вихідних рівнянь руху води до свердловини у вигляді рівняння прямої лінії [1, 11]. Наприклад, вихідне рівняння (2.3), що описує неусталений рух води до артезіанської свердловини, що працює в необмеженому водоносному горизонті, може бути представлено у вигляді наступних трьох формул:

$$S = \frac{0,183Q}{T} \left(\lg \frac{2,25a}{r^2} + \lg t \right); \quad (35)$$

$$S = \frac{0,183Q}{T} \left(\lg 2,25a + \lg \frac{t}{r^2} \right); \quad (36)$$

$$S = \frac{0,366Q}{T} \left(\frac{1}{2} \lg 2,25at + \lg r \right). \quad (37)$$

Всі три наведені форми запису того самого рівняння (34) являють собою рівняння прямої лінії в різних системах координат: (35) – у координатах S – $\lg t$; (36) – у координатах S – $\lg(t/r^2)$ і, нарешті, (37) – у координатах S – $\lg r$ (рис.1.4). Кутовий коефіцієнт кожної із прямих, описуваних рівняннями (35-37), визначається членом рівняння, що знаходиться перед дужкою, а величина, що відтинається прямими на осі абсцис (по лінії нульового зниження рівня) – першими членами рівняння в дужках. В аналогічних трьох формах може бути відповідно представлено і вихідне рівняння, що характеризує рух підземних вод до ґрунтової свердловини, що працює в необмеженому водоносному горизонті.

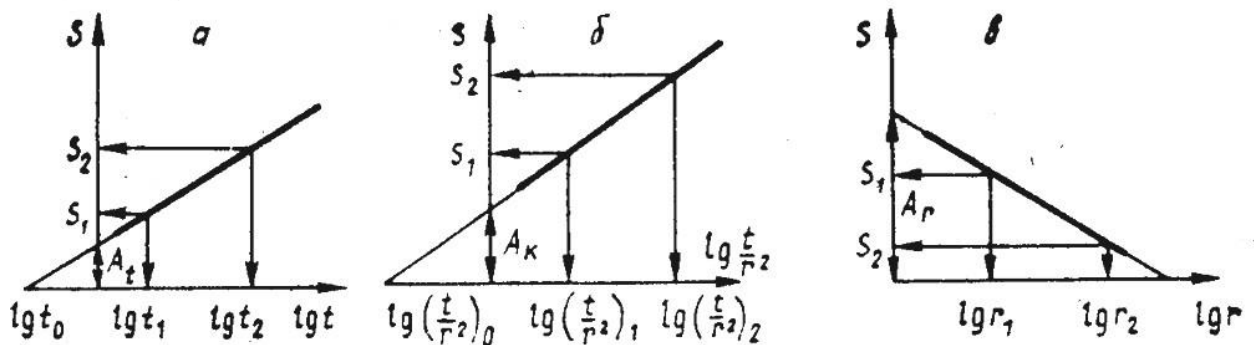


Рис. 2 . Графіки залежності $S = f(\lg t) = f[\lg(t/r^2)]$, $S = f(\lg r)$

Відповідно до трьох наведених форм вихідних рівнянь можна використовувати три способи графоаналітичної обробки даних дослідних відкачок, що одержали на практиці найменування способів часового, комбінованого і площинного простеження.

Обробка і подання дослідних даних у вигляді прямої, описуваної рівнянням (1.7), широко використовується як при одиночних, так і при кушових відкачках. Для кожної фіксованої точки (свердловини) може бути побудований графік $S=f(\lg t)$, що дозволяє проводити визначення розрахункових параметрів (рис.2 а).

Обробка і подання дослідних даних у вигляді графіків $S=f[\lg(t/r^2)]$ і $S=f(lgr)$, які описуються відповідно рівняннями (35) і (36), можливі при наявності достатньої кількості спостережних свердловин (не менш трьох-чотирьох).

Значення розрахункових параметрів (коефіцієнтів водопровідності і п'єзопровідності) визначаються за кутовими коефіцієнтами C і початковими ординатами A , що знімається з відповідних прямолінійних графіків простеження. Формули для розрахунку параметрів за трьома видами простеження наведені в табл. 1. Кутові коефіцієнти графіків простеження визначаються за двома точками на прямій відповідно за відносинам: $C=(S_2-S_1)/(lgt_2-lgt_1)$ – для часового, $C=(S_2-S_1)/[\lg(t/r^2)_2-\lg(t/r^2)_1]$ – для комбінованого і $C=(S_2-S_1)/(lgr_2-lgr_1)$ – для площинного простеження. Для зручності кутові коефіцієнти можна обчислювати як різниця знижень, приймаючи: $lgt_2-lgt_1=1$, $\lg(t/r^2)_2-\lg(t/r^2)_1=1$, $lgr_2-lgr_1=1$.

Таблиця 1.2.

Розрахункові формули для визначення гідрогеологічних параметрів

Спосіб обробки, графік	Розрахункові формули для визначення параметрів	
	Водопровідності (T)	П'єзопровідності (a)
Часове простеження, $S=f(lgt)$	$T=0,183Q/C_t$	$lga=2lgr - 0,35+A_t/C_t$
Комбіноване простеження, $S=f[\lg(t/r^2)]$	$T=0,183Q/C_k$	$lga= A_k/C_k - 0,35$
Площинне простеження, $S=f(lgr)$	$T=0,183Q/C_r$	$lga=2 A_r/C_r - 0,35- lgt$

Визначення параметрів, і зокрема коефіцієнта п'єзопровідності, за цими способами простеження можливе також за величиною відрізка, що відтинається прямолінійними графіками на осі абсцис (по лінії нульового зниження). Ці відрізки (відповідно lgt_0 , $\lg(t/r^2)_0$ і lgr_0 , рис. 1.4), як ми вже відзначали, визначаються першими членами рівнянь (2.7–2.9), що стоять у дужках. Відповідно до цього при відомих величинах цих відрізків (знімаються із графіків) для визначення коефіцієнта п'єзопровідності можуть використовуватися відповідно такі формули:

$$a = \frac{r^2}{2,25t_0}; \quad a = 0,445\left(\frac{r^2}{t}\right)_0 \quad \text{і} \quad a = \frac{r_0^2}{2,25t}. \quad (38)$$

Обумовлені в такий спосіб значення п'єзопровідності повинні збігатися із значеннями п'єзопровідності, що розраховуються за формулами із табл. 1.2. При відомих значеннях водопровідності і п'єзопровідності може бути визначена величина пружної водовіддачі $\mu^* = T/a$.

Тема 3

ВИЗНАЧЕННЯ ВИТРАТИ ПОТОКУ ПІДЗЕМНИХ ВОД

Якщо водоносна товща має один і той же літологічний склад і відносно однаковий коефіцієнт фільтрації, вона називається *однорідною*. Рух підземних вод у водоносних горизонтах завжди тією чи іншою мірою є неусталеним. Однак, коли умови живлення та розвантаження підземних вод дуже мало змінюються в часі, то рух підземних вод можна розглядати як усталений, тобто практично незмінний у часі.

При вивченні руху підземних вод звичайно виникають завдання: 1) визначення витрати потоку підземних вод; 2) побудова депресійної кривої (для безнапірних водоносних горизонтів) або п'єзометричної кривої (для напірних водоносних горизонтів).

У подальшому розгляд розрахунків наведено стосовно однорідного усталеного руху потоку підземних вод.

3. 1. Визначення витрати рівномірного потоку підземних вод

Фільтрація називається *рівномірною*, якщо по мірі руху підземних вод швидкість і витрата потоку не змінюються. Такий вид руху зустрічається в місцях, де водоносні горизонти не мають живлення і де відсутнє розвантаження. Рух підземних вод тут має транзитний характер.

У *безнапірних водоносних горизонтах* такий рух спостерігається за умови, що дзеркало підземних вод паралельне нижньому водотриву (рис. 3.1).

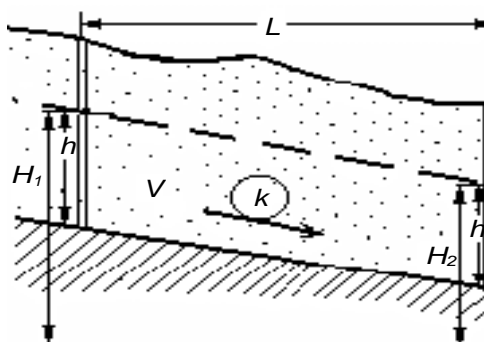


Рис.3.1. Схема рівномірного безнапірного потоку:

H_1 і H_2 – позначки рівня підземних вод у свердловинах; h – потужність водоносного горизонту; V – швидкість потоку; k – коефіцієнт фільтрації

За формулою Дарсі

$$Q = kFI, \quad (3.1)$$

де I напірний градієнт

$$I = \frac{H_1 - H_2}{L}, \quad F = hb, \quad (3.2)$$

де b – ширина потоку.

Витрата потоку підземних вод, виходячи з (1), дорівнюватиме:

$$Q = khb \frac{H_1 - H_2}{L}. \quad (3.3)$$

Якщо ширину потоку b прийняти таким, що дорівнює 1 м, отримаємо залежність для визначення *одиночної витрати потоку* (витрата потоку, ширина якого дорівнює 1 м):

$$q = kh \frac{H_1 - H_2}{L}, \quad \text{або } q = khl. \quad (3.4)$$

Знаючи величину одиночної витрати q легко знайти загальну витрату потоку за формулою:

$$Q = qb. \quad (3.5)$$

У *напірних водоносних горизонтах* рівномірна фільтрація спостерігається, якщо по мірі руху води спостерігається постійність потужності і напірного градієнту потоку (рис.3.2).

Витрата потоку за формулою Дарсі дорівнюватиме:

$$Q = kmb \frac{H_1 - H_2}{L}, \quad (3.6)$$

а одиночна витрата потоку:

$$q = km \frac{H_1 - H_2}{L}, \quad \text{або } q = kml. \quad (3.7)$$

У вертикальному розрізі рівномірного потоку поверхня води має вигляд прямої лінії. Для побудови ліній рівня підземних вод (безнапірних і напірних) в умовах рівномірної фільтрації достатньо відміток рівня у двох точках, розташованих у напрямку руху.

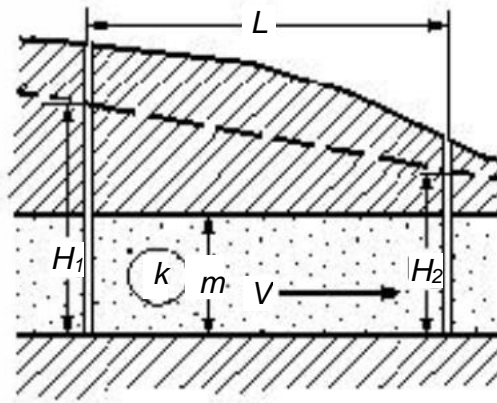


Рис. 3.2. Схема рівномірного напірного потоку:

H_1 і H_2 – позначки п'єзометричного рівня підземних вод у свердловинах;
 m – потужність водоносного горизонту; V – швидкість потоку; k – коефіцієнт
фільтрації

Питання до самоконтролю
Динаміка підземних вод

1. Що включає в себе поняття «параметр процесу фільтрації»?
2. Які гідрогеологічні параметри можна визначити за даними режимних спостережень?
3. Що таке прямі і обернені задачі фільтрації підземних вод?
4. Які режимні спостереження необхідно мати для визначення величини інтенсивності живлення ґрунтових вод по площі в умовах усталеної фільтрації?
5. Як визначається величина інтенсивності інфільтраційного живлення ґрунтових вод для схеми безнапірного потоку на горизонтальному водотриві в умовах усталеної фільтрації?
6. Як визначається величина інтенсивності інфільтраційного живлення ґрунтових вод по площі для необмеженого пласта в умовах неусталеної фільтрації?
7. За яких умов можливе визначення коефіцієнта рівнепровідності?
8. Які способи існують для визначення коефіцієнту рівнепровідності?
9. Як можна визначити коефіцієнт гравітаційної ємності порід?
10. Як за даними режимних спостережень визначається опір ложа водойми?
11. Які види гідрогеологічних робіт належать до дослідно-фільтраційних?
12. Які гідрогеологічні параметри можна визначити за даними дослідно-фільтраційних робіт?
13. Що таке відкачування?
14. Як поділяються відкачування залежно від їх цільового призначення?
15. Як поділяються відкачування залежно від наявності чи відсутності спостережних свердловин?
16. Що таке пробні відкачування?
17. Що таке дослідні одиночні відкачування?
18. Що таке дослідні кущові відкачування?
19. Що таке дослідно-експлуатаційні відкачування?
20. Що таке нагнітання в свердловині?
21. Що таке наливи в шурфи?
22. Які методи використовуються для визначення гідрогеологічних параметрів за даними відкачувань?
23. За яких умов можна застосовувати рівняння Тейса?
24. У чому полягає суть методу підбору?
25. У чому полягає суть методу еталонної кривої?
26. Які методи простеження використовуються для визначення гідрогеологічних параметрів?
27. Які головні умови застосування методів простеження?
28. Як практично застосовується метод простеження за часом?
29. У чому суть методу простеження по площі?
30. У чому суть методу комбінованого простеження?
31. Що таке «міграція підземних вод»?
32. Які види течії виділяють у ДПВ у зв'язку з розглядом процесу міграції підземних вод?
33. Що таке гравітаційні течії?

34. Що таке елізійні течії?
35. Що таке змішані течії?
36. Які існують механізми міграції підземних вод?
37. Що таке конвекційний перенос?
38. Що таке кондуктивний перенос?
39. Що таке гідро дисперсія?
40. Які поняття розглядаються у зв'язку із застосуванням в розрахунках механізму конвекційного переносу?

41. Як оцінюється дифузійний перенос при розгляді процесів міграції?
42. Як визначається коефіцієнт молекулярної дифузії?
43. Для яких умов закон Фіка є справедливим?
44. Як оцінюється гідро дисперсія при розгляді процесів міграції?
45. Що таке зона аерації?
46. В якому стані може знаходитися повітря в зоні аерації?
47. В якому стані може знаходитися вода в зоні аерації?
48. Що таке коефіцієнт переносу вологи?
49. Які області розподілу вологи виділяють в зоні аерації?
50. Який стан ґрунту називають насиченим?
51. Який стан ґрунту називають ненасиченим?
52. Який стан ґрунту називають квазінасиченим?
53. Що таке повний термодинамічний потенціал вологи?
54. Що таке гравітаційний потенціал вологи?
55. Що таке потенціал тензометричного тиску?
56. Що означає поняття всмоктуючий тиск?
57. Що означає поняття всмоктуюча висота?
58. Як формулюється закон переносу вологи?
59. В чому суть поняття коефіцієнт переносу вологи?
60. Що таке основна гідрофізична характеристика ґрунту?

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет ГГРТ

Спеціальність 103 Науки про Землю

Освітня програма Прикладна гідрогеологія

Семестр 8

Форма навчання – денна

Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень): бакалавр

Навчальна дисципліна: **Динаміка підземних вод**

ПІБ студента _____

Екзаменаційний білет №1

Варіант №1

1. Які природні сили обумовлюють явище фільтрації води крізь гірські породи? -3б.
2. Який вигляд має рівняння пружного режиму фільтрації для шматково-однорідних або однорідно-анізотропних пластів? -3б.
3. В чому полягає суть методу фільтраційних опорів? -3б.
4. Що таке фактор перетікання та показник перетікання? -3б.
5. В чому полягають особливості рівняння Буссінеска з позиції його розв'язання? -3б.
6. Які рівняння називаються лінійними і нелінійними? -3б.
7. Що означає поняття гранична умова II-го роду? -3б.
8. В яких випадках допускається схематизація, що дозволяє розглядати потоки як одномірні? -3б.
9. Як визначається гідродинамічний напір у заданій точці одномірного потоку із сталою водопровідністю?- 3б.
10. Які потоки підземних вод по мірності течії розглядаються в ДПВ? -3б.

Затверджено на засіданні кафедри фундаментальної та прикладної геології
Протокол №1 від 28 серпня 2023р.

Завідувач кафедри Валерій СУХОВ

Екзаменатор Вячеслав ПЕТИК